Pubblicazioni
dell' Osservatorio privato di Collurania (Teramo)
No. 2

Prof. G. BOCCARDI

Studio sulla Variazione della Latitudine di Collurania

Il Metodo di Tietjen per la Correzione dell'orbita di un pianeta

Applicazione del metodo di Tietjen a Vincentina (366) e Vaticana (416)

Collurania 1900

STUDIO SULLA VARIAZIONE
DELLA LATITUDINE DI COLLURANIA

del Prof. G. Boccardi

Strumento e metodo di osservazione.

Secondo il piano stabilito d'accordo col dott. Cerulli, durante il mio soggiorno nel 1899 nell'Osservatorio da lui fondato, mi sono incaricato del servizio meridiano, consistente nella determinazione del tempo e della latitudine, mediante l'eccellente zenith-telescope di Througton e Simms. Questo istrumento è poggiato sopra un pilastro solidissimo di pietra, il quale riposa sulle fondamenta dell'Osservatorio ed è rivestito di un involucro di legno, per modo che l'osservatore non tocca mai il pilastro. L'obbiettivo di 75^{mm} di apertura e 77 cent. di distanza focale dà immagini nitidissime (1). Io ho impiegato costantemente l'oculare che amplifica 75 volte. Il circolo orizzontale di 28 cent. di diametro è diviso di 10 in 10 minuti, e mediante due microscopi a 180° fra loro si leggono i 10″, apprezzandosi facilmente 1″. Il circolo verticale ha 20 cent. di diametro, e mediante il nonio vi si leggono i 20″, apprezzandosi facilmente 5″. Si sa che per le ricerche cui è destinato l'istrumento, una divisione anche grossolana basterebbe. Sul piede triangolare dell'istrumento sono fissate due livelle ad angolo retto, che permettono di

(1) Il tipo d'istrumento adottato nelle stazioni internazionali di latitudine ha 108^{mm} di apertura e 130 cent. di distanza focale. Se queste dimensioni maggiori permettono di ottenere immagini che si puntino meglio, naturalmente espongono ad errori di flessione non trascurabili, quando si osservino distanze zenitali semplici.

rendere verticale l'asse di questo nome. L'asse orizzontale cui è collegato il cannocchiale si regola mediante una livella mobile, che vi si mette a cavaliere. Avvi pure la grande livella di spia collegata al circolo verticale, la quale è più sensibile e fa un ufficio principale nell'impiego dell'istrumento.

La stabilità di questo zenith-telescope è tale che l'azimut varia appena di qualche secondo nello spazio di un mese, il che rende facilissima la determinazione del tempo. L'errore di collimazione determinato dal dott. Cerulli nel 1893 e da me nel 1899 è risultato eguale a 0.″ 21. L'inclinazione dell'asse verticale può ridursi facilmente a qualche secondo, ma non si mantiene costante. Invece, l'asse orizzontale, una volta livellato, rimane regolato per una settimana e più. Del rimanente, avendo io determinata la latitudine costantemente col metodo di Horrebow-Talcott, non occorreva regolare molto spesso l'istrumento, perchè nel combinare le osservazioni a nord con quelle a sud, vi è perfetto compenso.

Il tempo è indicato nella sala meridiana dal pendolo n. 28 di Kittel (Altona), che batte 0.ˢ 5, e il cui andamento nel 1899 ha lasciato un poco a desiderare; ma esso serviva soltanto come termine di confronto col campione regolatore Riefler, il cui andamento diurno nell'està come nell'inverno non oltrepassa mai 0.ˢ 3. Per la determinazione del tempo io preferivo il metodo dell'occhio e dell'orecchio, giungendo spesso con quattro e anche tre sole stelle, fra 0° e 90° di declinazione, ad ottenere scarti di uno o due decimi di secondo in tempo.

Per la determinazione della latitudine invece mi son servito del cronografo a secco di Fuess, poichè a fine di accrescere l'esattezza nella misura delle distanze zenitali, anzichè bisecare una sola volta le stelle nella loro culminazione, io le bisecavo in media sette volte, secondo il tempo da esse impiegato nel percorrere la regione media del campo. Mi bastavano 16ˢ per bisecar la stella, premere il tasto del cronografo e registrar la lettura del tamburo del micrometro.

Questo è il metodo da me tenuto costantemente nell'osservare, salvo a ridurre al meridiano le osservazioni mediante la nota formola:

$$-\frac{(15)^2\,\tau^2 \sin 1'' \sin 2\,\delta}{4}.$$

Per ogni stella mi son calcolato il fattore $\frac{(15)^2 \sin 1'' \sin 2\,\delta}{4}$ il quale mi è servito per ridurre tutte le osservazioni della stessa, variando solo τ.

Sulle prime volli provare osservazioni fatte a più gradi di azimut dal meridiano, nel qual caso la formola di riduzione era la seguente, sempre sottrattiva rispetto alla distanza zenitale

$$-\frac{(15\tau)^2 \sin 1''}{2}\;\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin z}.$$

Il fattore $-\frac{15^2}{2} \sin 1'' \cos\varphi$ è pel nostro Osservatorio in logaritmi: [6.60326], rimanendo ad aggiungere per ogni stella il fattore $\frac{\cos\delta}{\sin z}$.

Però questo metodo non mi dette risultati molto esatti, sicchè, dopo poche prove, vi rinunziai.

Quanto al leggere le rivoluzioni eseguite dal micrometro, la loro numerazione, come prescrive lo Chauvenet, dev'essere diversa di origine nelle due posizioni del circolo: ad *E*, o ad *W*. Se le divisioni del tamburo del micrometro crescono come le letture del circolo zenitale, si ha la posizione cui lo stesso autore chiama *B*, nel caso contrario si ha la posizione *A*. La posizione *A* o *B* non dipende dall'osservare col circolo ad *E* o ad *W*, ma dall'essere la stella a nord o a sud. Quando si osserva con circolo ad *W* una stella a nord, lo zenit sta alla destra dell'osservatore, il quale, servendosi dell'oculare a prisma, si volge di fianco alla stella, ossia di fronte al circolo verticale; per una stella a sud, lo zenit è a sinistra. Allorchè invece si osserva col cerchio ad *E*, accade il contrario rispettivamente. Io dunque per evitare com-

plicazioni ed errori nella lettura delle rivoluzioni del micrometro, adottai per punto di partenza: 0^r il punto medio fra due designati denti del pettine che trovasi nel campo, facilmente riconoscibili per un mio segno convenzionale, e contai le rivoluzioni prendendo per senso positivo quello da destra a sinistra dell'osservatore.

Per tal modo a prima vista riconoscevo qual numero intero di rivoluzioni avesse percorso il filo mobile. Ho bisecato le stelle sempre col filo medio dei tre che si trovano nel telaio mobile.

Adottata questa convenzione, di contare le rivoluzioni sempre da destra a sinistra, cioè avvitando, la riduzione al meridiano che è sempre sottrattiva riguardo alla distanza zenitale osservata, per me alcune volte doveva aggiungersi altre sottrarsi dalla lettura del micrometro. Infatti è chiaro che nella posizione: cerchio ad *W*, seguendo una stella a nord le letture del micrometro vanno diminuendo a misura che l'astro si avvicina allo zenit, seguendo una stella a sud le letture crescono. Il contrario ha luogo per la posizione: cerchio ad *E*. Onde può formarsi il quadro seguente:

	*	zenit	segno della riduzione
Cerchio *W*	nord	a destra	—
	sud	a sinistra	+
S	nord	a sinistra	+
	sud	a destra	—

Questa leggiera complicazione non s'incontra che nelle riduzioni delle osservazioni, il che è proprio nulla; in compenso col mio modo di contare le rivoluzioni non c'è complicazione di sorta o anche pericolo di errore nell'osservare.

A fine di evitare i passi perduti ebbi l'avvertenza di muovere i fili sempre nello stesso senso per ambedue le stelle di ogni coppia. Del resto, io mettevo il filo medio presso a poco nel luogo in cui doveva comparire la stella, per muovere il meno possibile il tamburo; entrata la stella nel campo,

me le avvicinavo col filo fino ad oltrepassarla di poco, e quando la stella raggiunto il filo mi appariva bisecata dallo stesso, toccavo il cronografo, senza troppo affrettarmi, per assicurarmi chè la bisezione fosse benfatta [1]. Dopo una bisezione portavo addietro il filo per due o tre rivoluzioni, e quindi ricominciavo un'altra bisezione.

Nel maggior numero dei casi la variazione in distanza zenitale era quasi insensibile; ma ad ogni modo il moltiplicare le bisezioni accresceva l'esattezza delle osservazioni.

Quanto alla livella di spia, ch'è la parte più delicata e come il punto debole del metodo, io procuravo di evitare ogni sbalzo di temperatura per corrente di aria od altro. Gli sportelli della sala meridiana erano aperti un'ora prima di ogni serie di osservazioni. Fissato l'istrumento e letto il termometro, un minuto innanzi all'entrar della stella nel campo, leggevo la livella, e, terminate le bisezioni, facevo un'altra lettura della livella. Quasi sempre le due letture differivano di pochissimo o anche di nulla. Ciò fatto, muovevo lentamente in azimut l'istrumento, evitando ogni scossa alla livella e, naturalmente, senza toccar più il cannocchiale, e giunto alla divisione a 180° dalla precedente nel circolo orizzontale, fissavo di nuovo l'istrumento in azimut, e muovevo destramente il tamburo dei fili fino a percorrere il numero di rivoluzioni pel quale differivano le due stelle in distanza zenitale meridiana, procurando di evitare ogni scossa all'istrumento. Dopo ciò, avvicinandosi il tempo della culminazione dell'altra stella, ripetevo le osservazioni come prima.

Sulle prime cominciavo le osservazioni dopo il crepuscolo; ma essendomi proposto di studiare la variazione della latitudine, seguendo le stesse coppie per più mesi e, finchè

(1) Per calcolare le riduzioni al meridiano bastava il secondo rotondo in tempo; ma per non dividere la mia attenzione con contare pure le battute del pendolo, ricorsi al cronografo, tantoppiù che moltiplicavo le bisezioni e bisognava leggere e registrare per ognuna di esse le indicazioni del tamburo.

2

fosse possibile, anche di giorno, mi convenne cominciare le osservazioni in està verso le $7^h\ ^1/_2$, in autunno intorno alle $5^h\ ^1/_2$ protraendole poi fin dopo la mezzanotte e spesso fino alle 15^h. Questa costanza nel lavoro mi permetteva di osservare fino a 10 e anche 11 coppie in una sola sera, e così potei fare 361 osservazioni complete, ottenere cioè 361 valori della latitudine, come risulta dal quadro pagina 21 a 27.

Scelta delle stelle.

Circa la scelta delle stelle mi son regolato con i criteri seguenti:

1° Ho adottato le posizioni date dal *Berliner Jahrbuch* pel 1899, facendovi le correzioni proposte da Auwers al *Fund. Katalog.* (Publ. XIV der Astr. Gesellsch.) nelle *Astr. Nachr.,* 1898, prendendo le correzioni da lui assegnate pel 1900 (¹);

2° Mi formai un catalogo di 40 coppie di stelle adatte al mio scopo, distribuite in tutto l'anno, ma fra queste coppie detti in primo luogo la preferenza a quelle che culminano con intervallo di pochi minuti fra loro, quanti bastavano perchè la bolla della livella prendesse una posizione stabile in ognuna delle due posizioni dell'istrumento. Detto intervallo variava per le diverse coppie da 12^m a 40^m. Solo in poche sere (per colmare quella lacuna nelle ore di osservazione) osservai delle stelle che passavano con 1^h d'intervallo, ma anche in questo caso le variazioni della temperatura erano leggerissime. Negli ultimi due mesi adottai due coppie:

β Trianguli e [6 Persei]
τ Pegasi 4 Cassiopeiae

(¹) Provai le correzioni ottenute per le stesse stelle nell'Osservatorio di Strasburgo (II volume degli *Annali*); ma l'accordo fra i valori della latitudine ottenuti con coppie diverse osservate nell'epoca stessa diveniva minore che adottando le correzioni di Auwers.

le cui stelle passano al meridiano con 3.^{m} 2 e 4.^{m} 7 d'intervallo rispettivamente. Ciò feci per modo di saggio, ma si vedrà che i risultati furono soddisfacenti. In questi casi però, siccome un segmento del campo, avente una freccia di $^3/_{10}$ del diametro, rimane coperto dal pettine del micrometro, e l'altra parte del campo è libera, e propriamente quella dalla quale entra l'astro quando si osserva con cerchio a nord, io osservavo la prima stella della coppia in tale posizione del circolo, mi contentavo di due o tre bisezioni, e poi giravo l'istrumento in azimut, dopochè mettevo il filo del micrometro nella posizione voluta. Quanto alla livella mi contentavo di leggerla due sole volte: l'una, appena la stella entrava nel campo (cerchio a W), l'altra appena terminate le bisezioni (cerchio ad E);

3° Dopo la vicinanza delle stelle quanto al tempo, veniva in ordine inferiore d'importanza la loro piccola differenza di distanza zenitale meridiana. L'esperienza mi ha però mostrato che anche per coppie di stelle differenti di 23′ in distanza zenitale, i valori ottenuti per la latitudine nell'istessa sera con dette coppie erano d'accordo con i valori datimi da coppie differenti per 1.′2. Ciò s'intende entro i limiti dell'errore di puntata e delle possibili correzioni ancora richieste dalle declinazioni delle stelle. Questa era una prova che il valore d'una rivoluzione del micrometro da me determinato era esatto. Il principal vantaggio (a mio credere) di aver coppie poco differenti in distanza zenitale è quello di evitar le minime scosse all'istrumento nel muovere il tamburo per passare da una stella all'altra. Se l'istrumento fosse dotato d'un doppio tamburo con passo identico si potrebbero adottare stelle più distanti. Ma anche con un sol tamburo, girandolo con delicatezza, si riesce a non dare nessuna scossa all'istrumento. Me ne sono assicurato facendo 20 e più rivoluzioni (mentre il cannocchiale era fisso anche in azimut) e leggendo la livella prima e dopo. È vero che la rifrazione differenziale è anche minima per stelle poco differenti in distanza zenitale; ma trattandosi di studiare la

variazione della latitudine, quell'elemento non mi pare d'importanza, allorchè si segue la stessa coppia per più mesi;

4° Quanto al valore della distanza zenitale, evidentemente l'ideale sarebbe di avere stelle vicinissime allo zenit, per mettersi al sicuro dalle leggerissime incertezze circa la rifrazione [1]. Però il moltiplicare in tal modo le condizioni riguardo alle coppie renderebbe pressochè impossibile l'applicazione del metodo Horrebow-Talcott. Quindi il più che potei fare fu che fra le coppie da me seguite per lungo tempo, nessuna oltrepassasse 20° di distanza zenitale meridiana; solo accidentalmente ho osservato delle coppie fino a 27° dallo zenit;

5° Per quel che riguarda la grandezza delle stelle, sebbene si consigli di evitare quelle superiori alla 4ª, io ho adoperato stelle di tutte le grandezze, sempre però superiori alla 7ª, ottenendo con tutte risultati soddisfacenti. È vero però che usavo un riguardo speciale circa l'illuminazione del campo, perchè conoscendo già la grandezza delle stelle e avuto riguardo pure al grado di trasparenza dell'atmosfera nelle varie sere, dopo molti tentativi mi fermavo a quel grado d'illuminazione che rendesse più vicine le dimensioni apparenti delle due stelle. Nel preparare un'osservazione, il maggior tempo lo davo alla conveniente illuminazione del campo.

Costanti istrumentali.

Valore d'una rivoluzione del micrometro. Il metodo che più conveniva all'istrumento era l'osservazione d'una circumpolare nella sua massima digressione *E* o *W*. Io scelsi *α Ursae minoris* e la sua digressione *E*. Quanto alla digressione *W*, accadendo essa non lontana dal mezzodì,

[1] Purtroppo dalle mie osservazioni risulta una sensibile differenza nella rifrazione anche a distanze zenitali eguali (vedi *Discussione*, pagina 32).

sebbene l'istrumento mi facesse veder la stella, dopo vari tentativi riconobbi che non potevo bisecarla bene, essendo troppo piccolo il suo disco apparente.

Naturalmente impiegai le formole:

$$\cos t_0 = \cot\delta \, tg\varphi, \quad \cos z_0 = \operatorname{cosec}\delta \sin\varphi, \quad T_0 = \alpha \pm t_0 - \Delta t,$$

servendo il segno superiore per digressione *W*, l'inferiore per quella ad *E*.

Le osservazioni furono da me fatte in 5 sere, dal 28 luglio al 1° agosto, cominciando 25^m o 30^m prima dell'istante della massima digressione, e terminando un egual tempo dopo. Entrata la stella nel campo, mettevo il più sottile dei tre fili del telaio mobile ad una lettura del micrometro un po' innanzi alla stella, scegliendo sempre un numero intero di rivoluzioni, sicchè il tamburo indicava sempre 0.00; quindi notavo il secondo rotondo in cui mi sembrava il filo bisecasse la stella, e ciò servendomi dell'orecchio, non del cronografo. Se si riflette all'incertezza dell'istante della bise zione, in causa del moto lentissimo della polare, si vedrà che l'impiego del cronografo sarebbe stato inutile o piuttosto illusorio. Avanzavo quindi il filo alla rivoluzione seguente, e ripetevo la stessa operazione; ciò facevo per tutta la parte utile del campo.

Leggevo la livella dopo ogni bisezione, ma mi convinsi le leggerissime oscillazioni della medesima essere piuttosto apparenti, non procedere da veri movimenti dell'istrumento, perciò nelle riduzioni non ne tenni conto. Riferisco qui, a mo' di saggio, le misure eseguite nel 1° agosto.

Valore di una rivoluzione del Micrometro.

1° agosto 1899.

Term.°	Rivol.	T	Δt intervallo dalla 9ª osservaz.	Δt in arco	sin Δt	sin Δt cos δ sin 1″	Δz	1^R
24.°6	13	18.h 58.m 14s	28.m 21s	7.° 5.′ 15″	9.091262	2.737958	546.″ 96	
	12	19. 1. 48	24. 47	6. 11. 45	9.033130	2.679825	478. 44	
	11	5. 22	21. 13	5. 18. 15	8.965874	2.612569	409. 80	
	10	8. 54	17. 41	4. 25. 15	8.886951	2.533646	341. 70	
	9	12. 27	14. 8	3. 32. 0	8.789787	2.436482	273. 20	
	8	16. 1	10. 34	2. 38. 30	8.663602	2.310297	204. 31	
	7	19. 34	7. 1	1. 45. 15	8.485880	2.132575	135. 70	
	6	23. 4	3. 31	0. 52. 45	8.185932	1.832627	68. 02	
24.°5	5	26. 35	0. 0	0. 0. 0				68.″ 370
	4	30. 8	3. 33	0. 53. 15	8.190028	1.836723	68. 66	68. 388
	3	33. 38	7. 3	1. 45. 45	8.487938	2.134633	136. 34	68. 268
	2	37. 9	10. 34	2. 38. 30	8.663602	2.310297	204. 31	68. 252
	1	40. 41	14. 6	3. 31. 30	8.788762	2.435457	272. 56	68. 220
	0	44. 15	17. 40	4. 25. 0	8.886542	2.533237	341. 38	68. 212
	— 1	47. 45	21. 10	5. 17. 30	8.964852	2.611547	408. 83	68. 067
	— 2	51. 18	24. 43	6. 10. 45	9.031965	2.678660	477. 16	68. 147
	— 3	54. 50	28. 15	7. 3. 45	9.089735	2.736430	545. 04	68. 130
	— 4	19. 58. 25	31. 50	7. 56. 45	9.141309	2.787318	613. 77	68. 126
	— 5	20. 1. 57	35. 22	8. 50. 30	9.186686	2.833381	681. 37	68. 128
24.°5	— 6	20. 5. 32	38. 57	9. 44. 15	9 228232	2.874928	749. 77	68. 182

Il valore di una rivoluzione, qui indicato nell'ultima colonna, è ottenuto combinando la 1ª osservazione con la 9ª, e così di 8 in 8. Feci pure le combinazioni di 9 in 9 e di 10 in 10.

Infine, tenuto conto della piccola correzione dipendente dalla differenza di rifrazione, la media dei valori ottenuti nelle cinque sere di osservazione risultò: $1^r = 68.''279$.

Il dott. Cerulli con poche osservazioni fatte nel 1893 aveva ottenuto $68.''10$ per valore provvisorio.

Può darsi pure che le diverse condizioni di temperatura vi abbiano influito un poco.

Per verificare l'esattezza delle mie misure provai, secondo il consiglio del dott. Cerulli, se per le misure più lontane dall'istante della digressione massima lo scarto fra Δz osservato e Δz calcolato fosse piccolo.

Sia Δt l'intervallo in secondi di tempo contato dall'istante della massima digressione; per ottenere la variazione Δz della distanza zenitale di una stella in dato intervallo si può ricorrere allo sviluppo in serie di Taylor

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3z}{dt^3}\Delta t^3 + \dots$$

Per l'istante della massima digressione

$$\frac{dz}{dt} = \mp \cos\delta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3z}{dt^3} = -\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos A}{\sin z}\cdot\frac{d\cos p}{dt}$$

p, l'angolo parallattico, è nel caso nostro di 90°.

Dall'equazione

$$\sin z\cos p = \cos\delta\sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos(\theta - \alpha)$$

differenziando quando $\cos p = 0$, si ha

$$\sin z\,\frac{d\cos p}{dt} = \sin\delta\cos\varphi\sin(\theta - \alpha).$$

Quindi

$$\frac{d^3z}{dt^3} = -\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos A}{\sin^2 z}\sin\delta\cos\varphi\sin(\theta - \alpha) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2 z}\sin 2\delta\cos A\sin(\theta - \alpha).$$

o, con precisione sufficiente

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \pm \frac{1}{2} \sin 2\,\delta$$

dove il segno superiore vale per la digressione E e l'inferiore per la digressione W.

Avremo quindi per la digressione E, in secondi d'arco

$$\Delta z = -\cos\delta.\ 15\,\Delta t + \frac{1}{12} \sin 2\,\delta\, \frac{(15\,\Delta t)^3}{(206265)^2}$$

ossia

$$\Delta z = -\cos\delta.\ 15\,\Delta t + 0.000\,000\,000\,285\,\Delta t^3.$$

Per $\Delta t = 30^m$ il 2° termine giunge appena a 1.″66.

Ora dal quadro precedente dedotta la variazione $\cos\delta.\,15\,\Delta t$ per un intervallo di 30^m dall'istante della massima digressione (che non è quello della 9ª osservazione) e tenendo conto della rifrazione differenziale si ottiene pel 2° termine quale risulta dalla osservazione: 1.″32, cioè lo scarto è nei limiti dell'errore di osservazione.

Valore di una divisione della livella. Detto valore fu da me determinato relativamente a quello di una rivoluzione del micrometro, servendomi di mire terrestri molto lontane. Ritenendo che questo fosse il punto degno di maggiore attenzione, moltiplicai queste determinazioni, variando le ore delle osservazioni e le mire terrestri. Le puntate sulle mire col filo del micrometro le ripetevo due o tre volte, evitando ogni passo perduto. Quanto alla livella, mi contentavo di una sola lettura ad ogni puntata. Dopo sette determinazioni, fatte in diversi giorni nel mese di luglio, ottenni per media il valore relativo: $1^d = 0.^r037303$, ossia $1^d = 2.''547$; il qual valore fu da me sempre adoperato nelle riduzioni delle osservazioni.

Il dott. Cerulli aveva ottenuto nel 1893: $1^d = 1.''97$; sicchè bisogna dire che per contrazione molecolare del vetro, la curvatura della livella sia aumentata di 0.″58. Verso la fine di ottobre, cambiate affatto le condizioni meteorolo-

giche e la lunghezza della bolla d'aria, feci un'altra determinazione del valore di 1^d, servendomi sempre di una mira terrestre osservata in due giorni diversi; ma il valore di 1^d della livella non mostrò variazione apprezzabile. Riferisco qui le misure eseguite il 31 ottobre, dando la media delle letture del micrometro nelle due o tre puntate.

Valore di una divisione della livella.

Lunghezza della bolla: 18 divisioni. Temperatura: 17.° 5.

Letture della livella	Letture del micrometro	Valore di una divisione
45,60	0,441	
		0,03598
14,65	1,555	
		3823
45,55	0,374	
		3785
14,35	1,555	
		3697
45,92	0,388	
		3599
14,65	1,513	
		3687
45,70	0,368	
		3782
14,60	1,544	
		3690
47,30	0,337	
		3763
14,95	1,554	
		3761
45,43	0,408	
		3790
14,87	1,566	
		3688
45,23	0,446	
		3800
14,07	1,630	
	Media	0,03728

Questa serie mi dà per valore medio $1^d = 2,''545$, valore pressochè identico a quello ottenuto in luglio, al quale mi attenni come dedotto da maggior numero di misure. Non avendo notato variazione sensibile nel valore di 1^d al variar della temperatura, sebbene avessi spesso consultato il termometro durante le osservazioni di stelle per la latitudine, non ne tenni conto nelle riduzioni.

Ecco ora la lista delle coppie da me osservate, includendovi anche quelle che osservai una volta sola a mo' di saggio. Per ogni stella do qui le declinazioni approssimate per non tener conto della variazione durante i cinque mesi di osservazione, aggiungendovi la distanza zenitale media che indico con z e il valore della semi-differenza delle letture del micrometro, che indico con m (1).

È chiaro che per le riduzioni mi servii delle esatte posizioni apparenti; anzi siccome di molte stelle non è data l'effemeride di dieci in dieci giorni nel *Jahrbuch,* dovetti calcolarmele da me, tenendo conto anche dei piccoli moti propri. Riferisco qui solo l'effemeride per le declinazioni.

(1) Atteso il variar continuo delle posizioni apparenti, questo m non può essere che una media.

Coppie impiegate per la latitudine.

λ Boot. 46.°33′	γ Boot. 38.°45′	π Hercul. 36.°55′	η Hercul. 39.°7′	β Lyrae 33.°15′
γ Bool. 38. 45	τ Hercul. 46. 33	[*x* Herc.] 48. 21	ι Hercul. 46. 4	Ψ Cygni 52. 10
z 3.°53.′5	*z* 3.°54′	*z* 5.°43′	*z* 3.°27′	*z* 9.°28′
m 0.′5	*m* 0.′3	*m* 1.′3	*m* 4.′1	*m* 3.′2

γ Hercul. 19.°23′	ι Cygni 51.°31′	α Cygni 44.°56′	ξ Drac. 56.°54′
ζ Dracon. 65. 51	ε Cygni 33. 36	ν Cygni 40. 47	ο Hercul. 28. 45
z 23.°14′	*z* 8.°58′	*z* 2.°1′	*z* 14.°4′
m 2.′5	*m* 6.′0	*m* 11. 9	*m* 10.′0

ε Drac. 70.°1′	20 Ceph. 62.°18′	ζ Cep. 57.°42′	[Groomb. 3415]
α Delph. 15. 34	λ Pegasi 23. 2	β Pegasi 27. 32	16 Pegasi 25.°77′
z 27.°14′	*z* 19.°38′	*z* 15.°5′	*z* 17.°3′
m 8.′0	*m* 0.′9	*m* 1.′9	*m* 8.′2

[δ Ceph.] 57.°54′	ο Androm. 41.°47′	τ Pegasi 23.°12′	[ρ Cassiop.] 56.°56′
β Pegasi 27. 33	[κ Andr.] 43. 46	4 Cassiop. 61. 44	*d* Androm. 28. 32
z 15.°11′	*z* 0.°59′	*z* 19.°16′	*z* 14.°14′
m 6.′2	*m* 7.′6	*m* 11.′4	*m* 5.′2

ο Cassiop. 47.°44′	β Androm. 35.°6′	β Triang. 34.°31′	55 Cassiop. 66.°4′
μ Androm. 37. 58	φ Persei 50. 11	[6 Persei] 50. 36	[ϖ Arietis] 19. 26
z 4.°53′	*z* 7.°38′	*z* 8.°2′	*z* 23.°18′
m 11′.4	*m* 0.′9	*m* 5.′9	*m* 5.′3

γ Persei 53.°6′	ζ Persei 31.°35′	4 Camel. 56.°35′	γ Gemin. 16.°29′
[ο Persei] 31. 58	[1 Camel. seq.] 53. 41	β Tauri 28. 31	[43 Camel.] 69. 0
z 10.°34′	*z* 10°53′	*z* 13.°35′	*z* 26.°16′
m 6.′8	*m* 9. 0	*m* 6. 4	*m* 5.′2

Effemeridi di stelle

di cui il Jahrbuch dà solò le posizioni medie.

(I numeri fra parentesi sono le correzioni proposte da Auwers, di cui si tenne conto nelle riduzioni, non già nelle effemeridi).

χ Herculis (+ 0.″ 52)

Lug.	28	+ 48.°20.′51.″78
Ag.	8	52. 95
»	18	54. 51
»	28	55. 80
Sett.	7	56. 30

6 Persei

Sett.	27	+ 50.°36.′5.″18
Ott.	7	7. 57
»	17	10. 16
»	27	12. 66
Nov.	6	15. 02
»	16	17. 19
»	26	19. 11

+ 0.″ 31

Groombridge 3415 (doppia)

Ag.	28	+ 59.°34.′39.″81
Sett.	7	42. 95
»	17	45. 78
»	27	48. 41
Ott.	7	50. 27
»	17	51. 83
»	27	52. 88
Nov.	6	53. 38
»	16	53. 33
»	26	52. 71

ρ Cassiopeiae (+ 0.″ 42)

Ag.	28	+ 56.°56.′33.″35
Sett.	7	35. 45
»	17	38. 85
»	27	42. 41
Ott.	7	45. 28
»	17	48. 19
»	27	50. 80
Nov.	6	53. 06
»	16	54. 92
»	26	56. 32
Dic.	6	57. 21

ο Persei

Ott.	7	+ 31.°58.′18.″89
»	17	20. 10
»	27	21. 25
Nov.	6	22. 33
»	16	23. 32
»	26	24. 22

1 Camelop. seq.

Ott.	27	+ 53.°41.′34″15
Nov.	6	36. 07
»	16	38. 05
»	26	40. 10

κ Andromedae (— 0.″ 27)

Ag.	18	+ 43.°46.′46.″58
»	28	50. 26
Sett.	7	53. 34
»	17	56. 29
»	27	46. 59. 27
Ott.	7	47. 1. 59
»	17	3. 85
»	27	5. 77
Nov.	6	7. 32
»	16	8. 47
»	26	9. 19
Dic.	6	9. 46

43 Camelop.

Nov.	6	+ 69.°0.′4.″01
»	16	5. 24
»	26	6. 83

τ Arietis

Ott.	27	+ 19.°26′.27.″88
Nov.	6	28. 45

δ Cephei

Ag.	28	+ 57.°54.′15.″88
Sett.	7	19. 37
. . .	. . .	. . .
Nov.	6	34. 06
»	16	34. 95

Valori della latitudine.

Ogni coppia di stelle è designata da quella che passa prima al meridiano. I soli secondi (coi decimi e centesimi) della latitudine sono indicati. Le osservazioni chiuse fra parentesi furono da me notate come incerte nel quaderno di osservazione, ordinariamente per essere le immagini delle stelle poco distinte in quei casi, sia perchè l'atmosfera era coperta da leggieri veli di nubi, sia perchè era agitata dal vento.

Dette osservazioni non entrarono nella formazione dei valori medî.

Alle osservazioni della coppia [Groomb. 3415] ho dato il peso $\frac{1}{2}$, perchè la 1ª stella è doppia, e sebbene io abbia bisecato l'intervallo medio, pure le bisezioni erano meno esatte.

Osservazioni di luglio 1899.

λ Boot.	
Giug. 28	26.″01
Luglio 5	26. 13
	26. 070

γ Boot.	
Giug. 29	26.″33
Luglio 5	25. 90
8	25. 63
9	25. 71
11	25. 78
14	25. 89
	25. 873

γ Hercul.	
Lugl. 20	25.″79
21	25. 35
22	25. 85
24	25. 17
26	25. 30
27	25. 35
28	25. 76
31	25. 40
Agosto 1	24. 85
2	25. 73
	25. 455

η Hercul.	
Giug. 28	25.″95
Lugl. 10	25. 77
11	26. 33
15	25. 96
16	26. 75
19	26. 48
23	26. 83
	26. 297

π Herculis	
Giug. 29	25.″63
Luglio 5	25. 71
8	26. 22
9	25. 98
14	25. 96
17	26. 17
18	26. 11
	25. 970

β Lyrae	
Lugl. 12	25.″18
14	24. 75
16	25. 67
18	25. 66
19	26. 12
20	25. 67
22	26. 46
23	26. 86
24	26. 07
26	26. 78
29	26. 24
	25. 924

Latitudine luglio: 42.° 39.′ 25.″ 889.

Osservazioni di agosto.

η Hercul		π Hercul		β Lyrae		ι Cygni	
Agosto 6	25.″65	Agosto 3	25.″64	Agosto 2	25.″42	Agosto 5	27.″01
» 10	26. 09	» 8	26. 73	» 3	25. 45	» 12	26. 78
» 11	25. 41	» 12	(25. 05)	» 4	25. 88	» 14	27. 14
» 13	27. 02	» 25	25. 99	» 7	26. 54		**26. 976**
» 14	25. 93	» 26	25. 81	» 8	26. 01		
» 16	27. 00	» 27	26. 74	» 10	26. 05		
» 19	26. 92	» 28	27. 25	» 11	26. 26		
» 23	26. 56	» 29	26. 76	» 13	26. 00		
» 24	25. 88	» 31	26. 65	» 15	26. 17		
	26. 273	Settem. 1	26. 93	» 16	26. 63		
			26. 500	» 18	25. 87		
				» 19	26. 76		
				» 23	26. 01		
				» 24	26. 66		
				» 25	27. 08		
				» 27	27. 15		
				» 28	25. 85		
				» 30	27. 05		
				» 31	26. 85		
					26. 299		

Osservazioni di agosto *(seguito).*

α Cygni		20 Ceph.		ζ Cephei		o Andromed.	
Agosto 2	(25.″ 00)	Luglio 27	24.″ 85	Agosto 16	26.″ 68	Agosto 11	26.″ 11
» 3	25. 78	Agosto 2	24. 94	» 18	27. 05	» 16	26. 22
» 4	26. 26	» 4	25. 70	» 23	27. 59	» 28	26. 01
» 8	25. 32	» 5	25. 90	» 24	26. 80	» 29	26. 54
» 10	25. 91	» 10	26. 63	» 27	26. 86	» 30	27. 05
» 11	25. 36	» 11	25. 56			» 31	26. 09
» 13	25. 03	» 12	25. 63		**26. 996**		
» 15	25. 96	» 14	25. 75				**26. 372**
» 16	26. 18	» 15	25. 24				
» 18	25. 15	» 25	27. 41				
» 24	26. 06	» 26	25. 99				
» 25	26. 70	» 28	26. 51				
» 26	26. 82	» 29	27. 05				
» 27	26. 75	» 30	26. 76				
» 28	26. 47	» 31	27. 02				
» 30	26. 55						
» 31	26. 94		**26. 063**				
	26. 077						

Latitudine agosto: 42.° 39.′ 26.″ 293.

Osservazioni di settembre.

ξ Dracon.		β Lyrae		α Cygni		[Groombr. 3415]	
Agosto 31	26.″16	Settem. 4	27.″36	Settem. 3	26.″57	Settem. 5	25.″94
Settem. 1	26. 10	» 6	27. 50	» 4	25. 76	» 7	27. 78
» 4	25. 71	» 7	26. 91	» 5	26. 00	» 10	27. 22
» 5	26. 08	» 10	27. 35	» 6	26. 49	» 13	26. 87
» 6	26. 91	» 14	25. 82	» 7	26. 44	» 14	(25. 56)
» 7	25. 84	» 16	26. 17	» 10	26. 59	» 16	26. 04
» 8	26. 88	» 20	27. 59	» 13	26. 18	» 19	(28. 47)
» 10	26. 80	» 22	27. 09	» 14	26. 17	» 20	27. 89
» 16	27. 00	» 26	26. 35	» 16	26. 91	» 21	27. 49
	26. 387		**26. 903**	» 20	27. 31	» 22	26. 65
				» 21	26. 52	» 26	27. 15
				» 22	26. 77	» 28	(28. 48)
				» 26	26. 66	» 29	27. 19
				» 27	25. 97		**27. 022**
				» 28	25. 62		
				» 29	26. 33		
					26. 393		

ε Dracon.		ι Cygni	
Settem. 19	26.″87	Settem. 1	27.″20

Osservazioni di settembre *(seguito).*

20 Ceph.		o Androm.		[ρ Cassiop.]		o Cassiop.	
Settem. 3	26.″ 87	Settem. 2	26.″ 32	Agosto 29	26.″ 96	Settem. 6	26.″ 86
» 4	26. 75	» 3	27. 16	» 30	27. 13	» 14	26. 73
» 5	26. 99	» 4	(25. 63)	» 31	27. 77	» 19	27. 58
» 6	27. 01	» 5	27. 36	Settem. 1	26. 46	» 20	27. 24
» 7	27. 12	» 6	26. 20	» 2	27. 72	» 26	26. 49
» 8	27. 25	» 7	26. 07	» 3	26. 74	» 27	26. 76
» 10	27. 88	» 8	27. 04	» 4	26. 47	» 28	26. 93
» 14	27. 06	» 10	26. 74	» 5	27. 11		**26. 941**
» 16	26. 19	» 14	25. 97	» 6	26. 56		
» 19	26. 92	» 16	27. 13	» 7	26. 85		
» 20	26. 74	» 19	26. 83	» 8	26. 66		
» 21	26. 83	» 20	27. 06	» 10	27. 15		
» 22	(25. 75)	» 21	26. 52	» 14	26. 68		
» 26	26. 25	» 26	26. 69	» 19	27. 40		
» 27	27. 24	» 27	(25. 63)	» 20	26. 17		
» 29	26. 74	» 28	27. 17	» 21	26. 11		
	26. 923	» 29	25. 97	» 26	26. 79		
			26. 685	» 27	27. 03		
				» 28	26. 59		
				» 29	26. 23		
					26. 829		

[δ Ceph.]		β Androm.	
Settem. 1	26.″ 43	Sett. 20	25.″ 94
		» 27	26. 95
		» 28	27. 34
			26. 743

Latitudine settembre: 42.° 39.′ 26.″ 735.

Osservazioni di ottobre.

α Cygni	[Groombr. 3415]	20 Ceph.	ο Androm.	τ Pegasi
Ott. 2 27.″22	Ott. 3 27.″21	Ott. 2 27.″25	Ott. 2 27.″10	Ott. 3 26.″83
» 4 27. 02	» 4 26. 99	» 4 27. 36	» 25 27. 18	» 5 26. 33
» 5 26. 66	» 5 27. 15	» 5 27. 31	» 30 26. 84	» 9 26. 41
» 10 26. 76	» 10 27. 19	» 9 27. 48	**27. 040**	» 11 26. 49
. 11 27. 26	» 11 27. 32	» 11 (25. 41)		» 22 27. 01
» 22 27. 03	» 22 25. 99	» 23 (25. 83)		**26. 614**
» 25 26. 50	» 25 26. 20	» 25 27. 28		
26. 921	**26. 860**	» 30 26. 75		
		27. 037		

[ρ Cassiop.]	ο Cassiop.	β Androm.	β Triang.	γ Persei
Ott. 2 26.″60	Ott. 2 27.″20	Ott. 2 26.″22	Ott. 3 27.″50	Ott. 11 26.″74
» 3 26. 26	» 3 26. 71	» 3 27. 07	» 11 26. 06	» 22 26. 45
» 4 26. 60	» 4 27. 34	» 5 27. 19	» 22 (25. 01)	» 25 27. 17
» 5 27. 16	» 5 26. 50	» 10 27. 04	» 25 (28. 00)	**26. 696**
» 9 26. 76	» 11 27. 03	» 14 26. 99	**26. 780**	
» 11 26. 83	» 22 26. 85	**26. 902**		
» 22 26. 59	» 25 26. 34			
» 25 26. 46	» 30 26. 57			
» 30 26. 72	**26. 817**			
26. 665				

ε Dracon.	ι Cygni	ζ Ceph.	55 Cassiop.
Ott. 8 26.″34	Ott. 3 27.″49	Ott. 3 (28.″16)	Ott. 30 27.″10

Latitudine ottobre: 42.° 39.′ 26.″ 843.

Osservazioni di novembre.

α Cygni		[Groombr. 3415]		20 Ceph.		ο Androm.		[ρ Cassiop.]	
Nov. 2	26.″60	Nov. 2	27.″26	Nov. 2	27.″40	Nov. 2	26.″67	Nov. 2	26.″89
» 3	26. 67	» 3	26. 90	» 3	27. 17	» 5	26. 79	» 3	27. 40
» 10	26. 70	» 5	27. 06	» 5	27. 19	» 13	25. 84	» 5	27. 43
» 14	26. 79	» 13	26. 08	» 10	27. 12		**26. 433**	» 10	26. 72
	26. 690	» 14	25. 63	» 13	26. 94			» 14	26. 48
			26. 586	» 23	25. 92			» 23	25. 82
					26. 973				**26. 790**

ο Cassiop.		β Androm.		β Triang.		γ Persei		ζ Persei	
Nov. 2	27.″08	Nov. 2	26.″74	Nov. 2	26.″61	Nov. 2	26.″95	Nov. 2	27.″20
» 5	26. 85	» 3	26. 45	» 3	27. 10	» 3	27. 45	» 5	27. 51
» 10	26. 53	» 5	27. 23	» 5	27. 41	» 5	27. 79	» 13	27. 35
» 14	26. 47	» 10	26. 15	» 10	26. 48	» 13	26. 13	» 23	26. 89
	26. 733	» 14	26. 70	» 13	26. 78	» 14	26. 82		**27. 237**
			26. 654	» 14	26. 20	» 23	26. 72		
				» 23	26. 95		**26. 977**		
					26. 790				

4 Camelop.		γ Gemin.		[δ Ceph.]		τ Pegasi	
Nov. 5	27.″36	Nov. 14	27.″59	Nov. 14	25.″76	Nov. 3	27.″04
» 10	27. 29	» 23	27. 26			» 10	26. 43
» 23	26. 26		**27. 425**				**26. 735**
	26. 910						

Latitudine novembre: 42.° 39.′ 26.″ 822.

Errore probabile delle osservazioni.

Grazie all'attenzione speciale da me usata nella illuminazione del campo dell'istrumento, credo poter ammettere con certa approssimazione che l'errore probabile di osservazione sia lo stesso per tutte le coppie da me osservate, e dedurre quindi l'errore probabile di *una* osservazione nel modo seguente. Formo i residui del confronto delle singole osservazioni con la media relativa alla coppia stessa, quando questa sia stata osservata almeno tre volte. Allora se $[w]$ indica la somma dei quadrati di tutti questi residui, n il numero complessivo delle osservazioni di tutte le coppie ed m il numero delle coppie prese ad esame, l'errore probabile di *una* osservazione sarà:

$$e = 0{,}6745 \sqrt{\frac{[w]}{n-m}}.$$

Siccome però le declinazioni delle stelle potrebbero aver bisogno di leggiere correzioni, chiamando E_δ l'errore probabile delle posizioni adottate, E_φ l'errore probabile della latitudine conchiusa, ed ε l'errore probabile del valore della latitudine, per quanto dipende dalle osservazioni, si ha $E_\varphi^2 = E_\delta^2 + \varepsilon$. Il valore medio di ε, dedotto da tutte le coppie è dato da

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2}{m-1}\left[\frac{1}{n}\right].$$

In suddetto modo ottenni i valori seguenti pei singoli mesi.

	e	ε
Luglio	± 0.″ 292	± 0.″ 117
Agosto	0. 371	0. 203
Settembre	0. 345	0. 125
Ottobre	0. 237	0. 111
Novembre	0. 345	0. 171

Errore probabile della latitudine.

Questo errore si riferisce ai valori da me ottenuti per la latitudine dedotta da tutte le osservazioni raggruppate per mesi. Ricorderò che alle osservazioni della coppia [Groomb. 3415] do il peso $\frac{1}{2}$, trattandosi di una stella doppia. Quando di un mese ho solo due o tre osservazioni fatte negli ultimi giorni dello stesso, le raggruppo col mese seguente.

Similmente le osservazioni fatte solo nei primi giorni di un mese, le raggruppo al mese precedente. Se e è l'errore probabile di un valore della latitudine ed ε l'errore della latitudine conchiusa, ottengo il quadro seguente:

	e	ε
Luglio	± 0.″ 329	± 0.″ 051
Agosto	0. 434	0. 048
Settembre	0. 345	0. 031
Ottobre	0. 171	0. 022
Novembre	0. 350	0. 046

Discussione dei risultati.

Uno sguardo solo dato all'andamento delle osservazioni mostra evidente un aumento progressivo della latitudine dalla fine di giugno a quella di ottobre. Riassumo qui in un quadro i valori della latitudine ottenuti pei diversi mesi, deducendoli da tutte le osservazioni.

		errore probabile
Luglio	42.° 39.′ 25.″ 889	± 0.″ 051
Agosto	26. 293	0. 048
Settembre	26. 753	0. 034
Ottobre	26. 843	0. 022
Novembre	26. 822	0. 046

Si noterà che la variazione da luglio ad agosto è presso a poco eguale a quella da agosto a settembre, invece la variazione da settembre ad ottobre è molto piccola. Da ottobre a novembre sembra che la latitudine non abbia variato, chè la leggerissima diminuzione risultante dal quadro è già inferiore all'errore probabile. Questa variazione della latitudine divenne per me evidente fin dalle prime osservazioni di saggio fatte da me in giugno (e che non ho qui riferite perchè di peso inferiore alle altre); dico evidente, perchè i valori da me ottenuti dalle osservazioni di coppie diverse erano tutti inferiori a quelli ottenuti dal dott. Cerulli nel 1893. La media di undici osservazioni da lui fatte dal 24 ottobre al 6 novembre di quell'anno risultava eguale a

$$42.^{\circ}\,39.'\,27.'' \pm 0.''\,3.$$

Però man mano che continuavo le mie osservazioni, mi andavo avvicinando al valore trovato dal Cerulli, rimanendo però il mio valore della latitudine, sia in ottobre, sia in novembre, inferiore al suo, che era soltanto provvisorio, atteso il piccol numero di osservazioni. Del resto la differenza 0."16 è vicina al suo errore probabile.

L'aumento della latitudine di Collurania da giugno a ottobre è per me evidente, non solo perchè risulta dalle medie delle osservazioni di coppie diverse nei singoli mesi, ma e molto più perchè appare dal confronto dei valori datimi da alcune coppie nei diversi mesi, nei quali le ho seguite.

Se infatti il valore della latitudine, dedotto dalla media di quelli dati da diverse coppie, si avvicina più al vero, perchè è da presumere che i leggieri errori nelle declinazioni delle stelle si compensino in buona parte, quanto a provare se la latitudine varia o no *l'experimentum crucis* è il seguire il più che sia possibile le stesse coppie, come ho fatto io. Quando si paragonano valori ottenuti per la latitudine in diversi mesi con coppie diverse, si può obbiettare: le pic-

cole correzioni ancora richieste dalle δ [1], la diversa grandezza delle stelle (quindi variazione nell'errore di osservazione), la differenza delle distanze zenitali, ecc. Ma quando si segue per lungo tempo una coppia, ogni cosa rimane la stessa: valore della differenza in distanza zenitale $(m - m')$ [2], grandezza delle stelle, osservatore e istrumento. L'unica variazione è quella delle condizioni meteorologiche, ma queste entrano appunto fra le cause che si cerca di assegnare alla variazione della latitudine.

Quanto all'ampiezza della variazione, a dedurla dai valori della latitudine medi dei risultati di tutte le stelle, essa risulta di 0."95. Se invece si paragonano le medie di ogni coppia nei vari mesi, il valore della variazione varia da coppia a coppia, e questo è il punto sul quale mi permetto di attirare l'attenzione degli astronomi.

Riunisco qui in un quadro i valori della latitudine pei diversi mesi dedotti da quelle coppie che ho seguite più a lungo, tralasciando quelle altre, di cui la media è poggiata su troppo piccolo numero di osservazioni.

	β Lyrae	α Cygni	20 Ceph.	0 Androm.
Luglio	25."92			
Agosto	26. 30	26."08	26."06	26."37
Settembre	26. 90	26. 39	26. 92	26. 68
Ottobre		26. 92	27. 04	27. 04
Novembre		26. 69	26. 97	26. 97

Naturalmente vi sono delle lacune pei mesi in cui non fu più possibile osservare la tal coppia, o prima che cominciassi ad adoperarla. Non credo che sarebbe prudenza il colmare dette lacune servendosi delle variazioni date dalle altre coppie, appunto perchè la variazione della latitudine non è la

[1] E ce ne devono essere, perchè, in pochi anni d'intervallo, Auwers ha trovato che alcune stelle del *Fundament-Katalog.* richiedevano correzioni ascendenti fino a 0." 65.

[2] Salvo una insignificante variazione nel mutarsi dei luoghi apparenti.

stessa per coppie diverse. La coppia che merita più fiducia è o Androm. perchè passa vicinissima allo zenit (0.° 59′) e la semi differenza di distanza zenitale delle due stelle non è grande: $\frac{1}{2}(m - m') = 7.'6$.

In queste condizioni la rifrazione differenziale è piccolissima, e qualunque possibile anomalia nella rifrazione deve anche essere piccolissima. Il confronto della variazione della latitudine data dalle altre coppie del quadro surriferito, sembra accennare al fatto che per coppie culminanti a maggiore distanza dallo zenit, detta variazione sia maggiore.

Per 20 Ceph. che culmina a 19.° 38′, la variazione è di 0.″ 98 nel tempo istesso che per o Androm è 0.″ 67.

Quanto alla coppia α Cygni, ν Cygni, che dà 0.″ 84 per variazione di φ, essa passa a 2.° 1′ di distanza zenitale; ma le due stelle differiscono molto in z, essendo $\frac{1}{2}(m - m') = 11.'9$.

Questa differenza nella variazione della latitudine l'ho notata soltanto nel fare le riduzioni in Roma; ma se l'avessi intraveduta fin da principio, avrei scelto delle coppie anche a distanza maggiore dallo zenit, come leggo nell'*Anleitung zum Gebrauche des Zenitteleskops,* von Albrecht (pag. 18), essersi proposto da Helmert [1]. In tal modo si potrebbe in questo fenomeno (certamente complesso) sceverare la parte reale dovuta a veri spostamenti del polo, dalla parte dovuta a possibili anomalie nella rifrazione.

Per ispiegare come la variazione di φ sia maggiore per stelle a grande distanza dallo zenit, bisognerebbe dire che questa anomalia dipenda dal variare delle condizioni meteorologiche e produca il suo effetto massimo in autunno.

Certo il passar del sole da un emisfero all'altro deve concorrere a questo dislivello negli strati atmosferici.

Così si spiegherebbe come per stelle vicinissime allo zenit la variazione di φ sia minima, perchè in tali condizioni la

[1] Sento il dovere di render pubbliche grazie al ch. prof. Celoria, che gentilmente mi diè copia di dette istruzioni.

rifrazione è quasi nulla. Nel mio caso, adottando per la variazione di φ luglio-ottobre $+ 0.'' 67$ come risulta da o Andromeda (vicinissima allo zenit) la differenza $- 0.'' 31$ fra questa variazione e quella data da 20 Ceph., rappresenterebbe l'entità di questa anomalia di rifrazione a $19.° 38'$ di distanza zenitale.

Quanto all'accordarsi dei valori di φ ottenuti con o Andromeda e 20 Ceph. per ottobre, questo si spiegherebbe con leggiere correzioni di cui han bisogno ancora le stelle componenti quelle coppie. Se, per esempio, adottiamo la correzione $+ 0.'' 49$ per 20 Ceph. proposta negli *Annali dell'Osservatorio di Strasburgo,* sparirà l'accordo e rimarrà sempre assodato il fatto che per coppie molto lontane dallo zenit, la variazione su φ è maggiore.

Questa anomalia nella rifrazione potrà essere facilmente ammessa dagli astronomi, i quali sanno su quali basi, o, per dir meglio, su quali ipotesi poggi la teoria dalla rifrazione, come è trattata nei manuali classici di astronomia. Non permettendo lo stato attuale dell'analisi e della fisica terrestre di trattar completamente questa teoria, si comincia dal supporre la terra assolutamente sferica, trascurando lo schiacciamento, e si ammette (non so con quanto fondamento) che gli strati atmosferici sieno perfettamente *omogenei,* e si distribuiscano uniformemente per *ordine di densità.* Si chiudono gli occhi sul disquilibrio risultante nell'atmosfera dal riscaldamento prodotto dal sole nel giorno e dal raffreddamento notturno.

Partendo da questa ipotesi, s'insegna che l'effetto della rifrazione si limita a diminuire la distanza zenitale della immagine degli astri *senza però farle uscire dal loro verticale.* Poggiandosi allora sopra la legge di Descartes circa i seni dell'angolo d'incidenza e di quello di rifrazione, si giunge all'equazione:

$$rl \sin \zeta' = \text{costante}.$$

Differenziando questa, e tenendo presente il valore dell'an-

5

golo di contingenza, si giunge alla seguente equazione differenziale della rifrazione:

$$dz = -\frac{dl}{l} \frac{\frac{r_1 l_1}{rl} \sin \zeta_1^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 l_1}{rl} \sin \zeta_1^1\right)^2}}$$

Per integrare poi completamente detta equazione nei limiti dell'atmosfera, occorrendo una relazione fra r ed l, cioè fra il raggio di ogni strato sferico dell'atmosfera e l'indice di rifrazione corrispondente, si fanno varie ipotesi sulla densità e temperatura relativa dei vari strati atmosferici. Cassini, Newton, Bouguer, Laplace, Bessel propongono ipotesi differenti, e ne risultano le diverse tavole di rifrazione. Prima che l'astronomia di osservazione giunga al grado di perfezione cui la vediamo arrivata oggi, le molteplici ipotesi ammesse per far la teoria della rifrazione, rimangono come canoni incrollabili, e gli astronomi rendono ragione della divergenza quanto alla incertezza della legge di diminuzione della temperatura dell'atmosfera, con dire che le tavole di rifrazione, poggiate sulle ipotesi di Laplace, di Bessel, ecc., si accordano abbastanza bene fino a 79° dallo zenit. Ma accade che i geodeti costatano fenomeni innegabili di rifrazione laterale, ed ecco cadere il teorema della invariabilità del piano verticale. Ecco i meteorologisti de'nostri tempi che rovesciano le teorie ammesse al principio del secolo XIX circa la distribuzione degli strati atmosferici, la formazione dei venti e dei cicloni. Oggidì si parla continuamente di aree di alta e bassa pressione, d'irregolarità nella diminuzione della temperatura con le altezze, per modo che mentre talora al livello del mare il termometro segna — 10°, a 1500 metri di altitudine segna + 8°.

Dinanzi a questi ed altri fenomeni si comprende come nella teoria della rifrazione rimanga molto a fare. Non abbiamo noi il diritto, anzi il dovere di domandarci se sia proprio vero: 1° che la rifrazione non faccia altro che avvi-

cinar le immagini degli astri allo zenit? 2° che gli strati atmosferici si dispongano in equilibrio perfetto intorno alla verticale, qualunque sia la declinazione del sole, mentre è risaputa l'ineguale distribuzione delle pressioni barometriche, e la forma poco regolare delle superficie isoterme dell'atmosfera?

Allorchè veggo l'illustre presidente del *Bureau des Longitudes* affermare che: *la réfraction est un point faible en astronomie* (Faye, *Cours d'astronomie,* vol. I, pag. 110) e il ch. Caspari dichiarare: *la théorie des réfractions est la moins avancée des théories astronomiques* (*Cours d'astronomie pratique,* vol. I, pag. 82), mi credo autorizzato a formulare l'ipotesi suesposta per rendere ragione dei fatti da me osservati.

Mi rimane ora a dare qualche risposta a chi volesse trovare eccessiva la variazione $+ 0.'' 67$ da me costatata per la latitudine di Collurania da luglio ad ottobre. Dico dunque in primo luogo che, osservatore fedele, non posso falsare i fatti da me costatati, quali che ne siano le cause, anche se qualche altra causa ignota intervenisse per accrescere la variazione suddetta. Fo notare però che non si può addurre in mezzo qualche errore nel valore delle costanti istrumentali, sia perchè la forte variazione si trova non solo sui valori medi della latitudine dedotti da tutte le stelle, ma anche sui valori dati dalle singole coppie osservate in mesi diversi. Del resto, combinando, come ho fatto io, i valori di φ ottenuti con coppie per le quali $\frac{1}{2}$ $(m - m')$ è quasi eguale e di segno contrario, v'è compenso circa la leggera incertezza che rimanesse nel valore di 1^r. Per quel che riguarda il valore di 1^d della livella, essa rimane eliminata dal combinare (come ho fatto ad arte) osservazioni in cui detto valore aveva segni contrari.

In secondo luogo fo notare che il valore $0.'' 3$ che ordinariamente si assegna per tale variazione non è che una media fra i valori ottenuti da diversi osservatori, sicchè il mio sarebbe dei maggiori. Ma, ad ogni modo, dalle mie osservazioni, siccome da quelle di Berlino, Potsdam, Praga e Stra-

sburgo, risulta un massimo di autunno. Si terrà poi presente che la polodia, come è tracciata da Chandler, Helmert, ecc., accenna ad accrescere l'ampiezza delle sue spire.

In terzo luogo, poichè nello stato attuale della scienza, specialmente della fisica terrestre, mancano i dati affinchè si possa con la meccanica celeste rendere ragione del fenomeno che studiamo, non credo si possa far quistione circa l'ampiezza della variazione della latitudine. Quando si sarà in grado di assegnare la causa del fenomeno, se ne conoscerà l'ampiezza, e solo allora, mi pare, si potrà dire se il valore trovato da questo o quell'astronomo sia eccessivo. Di più rimarrebbe a provare che la causa dei diversi valori ottenuti per la latitudine in mesi diversi sia unica, e non v'intervengano altre cause, le quali possono influire in modo differente, secondo i luoghi diversi ove si eseguono le osservazioni, snaturando la nozione del fenomeno stesso. Siamo allora nel campo delle ipotesi. Ad ogni modo, dinanzi a tanta incertezza, che cosa significa quel convenzionalismo che induce a dichiarare come un canone scientifico l'escursione della variazione della latitudine limitarsi solo a due o tre decimi di secondo?

Avevo pensato di dedurre dalle mie osservazioni le piccole correzioni forse richieste dalla declinazione delle stelle, ma l'anomalia da me notata, e che attribuisco alla rifrazione, non mi ha permesso di applicare il metodo conosciuto per dedurre le piccole correzioni suddette.

Sebbene le attrazioni locali non abbiano rapporto con lo studio di cui mi sono qui occupato, non sarà però fuor di luogo il notare che la latitudine dedotta geodeticamente da triangolazioni eseguite nel 1898 dal ch. prof. De Berardinis (della R. Università di Napoli), risultava inferiore per 16.″7 a quella trovata provvisoriamente dal Cerulli nel 1893, e quindi 16.″5 da quella ottenuta da me. La vicinanza della massa enorme del Gran Sasso potrebbe rendere ragione di siffatta anomalia.

ESPOSIZIONE DEL METODO DI TIETJEN

per la correzione degli elementi dell'orbita di un pianeta

del Prof. G. Boccardi

Se è cosa facile calcolare una prima orbita che rappresenti in modo soddisfacente le osservazioni di un piccolo pianeta, fatte durante la 1ª opposizione, non è poi così facile determinare un'orbita che rappresenti bene una lunga serie di osservazioni fatte durante parecchie opposizioni. Esclusi i metodi affatto empirici per correggere grossolanamente un'orbita primitiva, rimangono quelli della variazione delle distanze e dei coefficienti differenziali. Il primo, oltre all'essere un poco empirico e poco filosofico, non pare che risponda alla fiducia che si ha in esso ordinariamente, dando alcune volte risultati poco soddisfacenti [1]. Sicchè io crederei sia da riserbarsi solo per correggere una 1ª orbita poggiata su tre sole osservazioni a poca distanza fra loro, in modo che rappresenti bene le osservazioni fatte per più mesi nella 1ª opposizione. Ma non appena le perturbazioni divengono sensibili (specialmente per i pianeti di piccolo movimento medio), non si può affermare *a priori* che esse abbiano l'istesso influsso sull'orbita e sui singoli luoghi, sicchè non è esatto ridursi ad un'orbita kepleriana, correggendo i luoghi dell'effetto delle perturbazioni, come pur si consiglia qualche volta. Converrebbe meglio applicare semplicemente il metodo ai luoghi, tenendo conto delle perturbazioni.

[1] V. la correzione degli elementi del (416) Vaticana a pag. 61.

Il metodo classico e più logico è quello dei coefficienti differenziali, la prima idea del quale è dovuta a Gauss (*Theoria motus,* II, 3).

Anche nel caso di due sole opposizioni, supponendo che per una di esse si formi un sol luogo e due per l'altre (servendosi delle osservazioni estreme), sebbene non si abbia allora che lo stretto necessario per ottenere delle correzioni approssimate agli elementi, cioè sei equazioni fra sei incognite, i risultati di detto metodo sono superiori a quelli della variazione delle distanzc. Nè si può obbiettare che nelle equazioni spettanti alla 1ª opposizione i termini noti saranno piccolissimi, mentre nelle altre della 2ª opposizione saranno rilevanti, chè il metodo dei coefficienti differenziali darà sempre le più probabili correzioni, e infine i termini noti piccolissimi sono una condizione come un'altra, cui si deve soddisfare. D'altra parte l'incertezza che può rimanere sui valori delle distanze e si ripercuote sui coefficienti differenziali che le hanno per divisori, non influisce meno sul metodo della variazione delle distanze.

Riguardo al metodo dei coefficienti differenziali, Watson dà le formole che esprimono la relazione fra le posizioni geocentriche e la variazione degli elementi dell'orbita; però dette formole, senza angoli ausiliari, son troppo primitive, e poco si prestano al calcolo. Oppolzer dà delle formole adatte al calcolo, le quali sono ordinariamente adoperate; ma la loro complicazione è evidente, (¹) specie per l'introduzione di altre variabili invece della longitudine del perielio e dell'angolo di eccentricità. Se l'orbita del pianeta ha forte eccentricità, è forse preferibile calcolare a 6 decimali i coefficienti differenziali, impiegando le formole proposte per le comete di corto periodo di rivoluzione. Così feci in una prima correzione degli elementi di Vaticana (*Bulletin Astronomique,* août 1898). Sebbene non avessi allora che

(¹) Si è risaputo dai discepoli di Oppolzer che il gran Maestro giungeva a scommettere che nessuno l'avrebbe superato nel trovar formole complicate per la soluzione di un qualche problema.

due opposizioni, l'orbita riuscì sufficientemente corretta, quantunque le correzioni ne fossero così forti che quanto a μ dovetti aumentarlo di 4.″ 95.

Avvi pure le formole di Schönfeld (*Astron. Nach.*, 2693-94), nelle quali entrano non gli elementi stessi, ma loro combinazioni. Dette formole riescono comode per l'esposizione teorica; ed hanno pure il vantaggio di essere simmetriche e le stesse per gli elementi equatoriali e per gli eclittici. Il signor Schulhof, partendo dalle formole dello Schönfeld, spinse l'approssimazione fino ai termini di 2° ordine, dando pure delle tavole per facilitarne l'applicazione. Queste formole possono essere adoperate con vantaggio qualora si tratti di calcolare, per così dire, bruscamente le variazioni degli elementi, senza passare per una serie di correzioni successive; ma non sono guari adoperate.

Avvi finalmente il metodo di Tietjen, il quale è costantemente impiegato nel Rechen-Institut di Berlino, e presenta i vantaggi di essere al tempo stesso molto razionale e di grande comodità per la pratica. Siccome detto metodo, che io sappia, non fu finora in Italia adoperato da quasi nessuno (salvo che dal dott. Cerulli il quale me lo ha gentilmente comunicato), ho stimato far cosa grata ai calcolatori di orbite con darne qui una esposizione particolareggiata, con applicazione al pianeta (366) ed al (416).

Sarà questo un tenue omaggio alla memoria dell'illustre fondatore del Rechen-Institut.

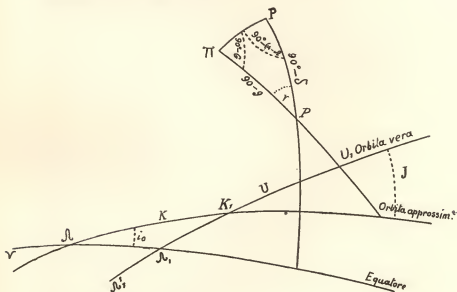
Il metodo dei minimi quadrati diviene molto faticoso non appena il numero delle incognite da determinarsi supera le tre o quattro. I molteplici controlli mediante le somme, le equazioni di verificazione, la rappresentazione differenziale saranno utili per avvertirci che qualche errore si è introdotto nel calcolo (il che accade facilmente); ma quanto a trovar l'errore stesso: *hic labor, hoc opus*. Col metodo ordinario dei coefficienti differenziali, come viene esposto a lungo da Oppolzer, si correggono tutti i sei elementi

insieme, somministrandoci ogni luogo normale due equazioni con sei incognite. Però, se si osserva che gli elementi del piano Ω ed i generalmente si determinano bene fin dal primo calcolo dell'orbita, sicchè per essi si trovano in seguito piccole correzioni, sorge l'idea di ritenere Ω ed i come esatti in una prima approssimazione, e quindi eliminarli in una 1ª correzione degli elementi. Tanto si ottiene con riferire la posizione geocentrica dell'astro, non già agli ordinari sistemi di coordinate, ecclittiche od equatoriali, ma al sistema determinato dal piano dell'orbita *approssimata*.

Questa sola trasformazione di coordinate ci permette (come si vedrà nello sviluppo delle formole) di separar la correzione degli elementi ellittici da quelli del piano. In tal modo si verrà ad applicare il metodo dei minimi quadrati prima ad un sistema di equazioni con quattro incognite, e poi ad un altro con due. Questo è il concetto fondamentale del metodo di Tietjen. Aggiungerò solo poche osservazioni. La prima è che, essendo le correzioni essenziali quelle degli elementi ellittici, spesso basterà la prima parte della correzione per ben rappresentare tutti i luoghi, sicchè si possa risparmiare la seconda, riguardo ad Ω ed i, conservando i loro valori primitivi.

Inoltre questo metodo si presta benissimo ad approssimazioni successive, essendo molto convergente (salvo in casi veramente eccezionali). Per esempio, corretti gli elementi ellittici, e volendosi procedere alla correzione di Ω e di i, i coefficienti differenziali relativi a questi due ultimi elementi van calcolati *solo allora* e non prima; quindi con valori quasi esatti del raggio vettore e dell'anomalia del pianeta, siccome pure dell'argomento di latitudine e della distanza dalla Terra nei vari luoghi.

Fatta poi l'una e l'altra parte della correzione degli elementi, se la rappresentazione dei luoghi lascia ancora scarti sensibili dalle osservazioni, basta ripetere la correzione degli elementi ellittici, senza più toccare Ω ed i, ma per questa 2ª correzione s'impiegheranno sempre i coefficienti differen-

ziali calcolati la prima volta, perchè i termini di 2° ordine sono senza influsso, trattandosi di piccoli scarti *O-C*, e quindi occorrendo piccole correzioni residuali. In appresso, per ogni nuova opposizione si otterranno altre due equazioni, da aggiungere alle precedenti, nelle quali si manterranno sempre gli antichi coefficienti differenziali; il che semplifica molto la correzione degli elementi, finchè si giunga all'orbita definitiva. Lo sviluppo delle formole e l'esempio da me addotto renderà più chiara questa breve esposizione del metodo di Tietjen, e ne farà apprezzare i vantaggi di semplicità ed eleganza, onde si rivela l'astronomo egualmente versato nella teoria e nella pratica.

Ω, i, ω sono riferiti all'equatore.

P è il polo dell'equatore. Π, quello dell'orbita approssimata, il cui piano è dato da Ω e da i.

J è l'inclinazione del piano dell'orbita vera su quello dell'approssimata.

p è il luogo geocentrico del pianeta, dato da α e δ. Le coordinate di p riferite al piano dell'orbita approssimata sono G e g, corrispondenti alla longitudine ed alla latitudine, essendo Ω l'origine delle G.

Innanzi tutto ci occorre trovare le relazioni fra le nuove coordinate e le equatoriali, α e δ, nel che mi piace avvalermi d'una semplificazione indicatami dal dott. Cerulli. Il prof. Tietjen non calcola dG e dg per mezzo di differenziali, bensì sotto la forma: $dG = G\text{-}Go$, $dg = g\text{-}g_0$, il che rende necessario: in primo luogo la trasformazione delle coordinate osservate α e δ in G e g nel che occorrono i logaritmi a 7 decimali; in secondo luogo, il calcolo di G_0 e g_0 relativi all'orbita approssimata, per effettuare il quale è anche necessario calcolare a 7 decimali le coordinate del Sole riferite all'orbita del pianeta. Questi lunghi calcoli con sì gran numero di cifre (qualcuno dei quali rimane senza controllo) sono evitati dal Cerulli, il quale ottiene di poter fare tutto il calcolo con quattro decimali, salvo (s'intende) la rappresentazione dei luoghi mediante l'orbita finale.

Il triangolo PΠp ci dà le seguenti relazioni differenziali, che legano le nuove coordinate alle equatoriali.

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \cos g\, dG &= \sin\gamma\, d\delta + \cos\gamma \cos\delta\, d\alpha \\ dg &= \cos\gamma\, d\delta - \sin\gamma \cos\delta\, d\alpha \end{aligned} \right.$$

La 1ª di queste ci somministra il termine noto nelle equazioni a coefficienti differenziali, che servono a correggere gli elementi ellittici; la 2ª il termine noto nelle corrispondenti equazioni rispetto agli elementi del piano. Ci occorre però il valore di γ, che troveremo in seguito.

Fermandoci per ora alla 1ª parte della correzione, ci bisognano delle relazioni fra $\cos g\, d\, G$ e gli elementi ellittici. Chiamiamo X, Y, Z le coordinate geocentriche del sole rispetto al piano dell'orbita approssimata, l'asse delle X passando per Ω. Sieno x, y, z le coordinate eliocentriche del pianeta rispetto allo stesso sistema di assi, ed U_1 la sua posizione eliocentrica, sicchè $U = K_1\, U_1$ Avremo

$$\begin{aligned} x &= r \cos U \cos K - r \sin U \sin K \cos J \\ y &= r \cos U \sin K + r \sin U \cos K \cos J \\ z &= r \sin U \sin J \end{aligned}$$

Nella prima poniamo $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} J$ in luogo di $\cos J$, essa diverrà:

$$x = r \cos (U + K) - 2\, r \sin U \sin K \sin^2 \frac{1}{2} J$$

Siccome poi J è piccolo, si può trascurare il secondo termine che ha per fattore $\sin^2 \frac{1}{2} J$, sicchè rimane

$$x = r \cos (U + K)$$

Una simile trasformazione ha luogo pel valore di y. Se quindi dinotiamo con u l'argomento di latitudine della posizione U contato da Ω_1' (essendo $K_1 \Omega_1' = K \Omega = K$), le espressioni di x, y e z divengono:

$$(2) \quad \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = r \sin (u - K) \sin J; \end{cases}$$

le coordinate della posizione geocentrica rispetto all'orbita approssimata essendo

$$\Delta \cos g \cos G, \quad \Delta \cos g \sin G, \quad \Delta \sin g,$$

avremo le eguaglianze:

$$(3) \quad \begin{cases} r \cos u = \Delta \cos g \cos G - X \\ r \sin u = \Delta \cos g \sin G - Y \\ r \sin (u\text{-}K) \sin J = \Delta \sin g - Z; \end{cases}$$

La differenziazione delle due prime ci dà:

$$dr \cos u - r \sin u \, du = \cos G \, d\, (\Delta \cos g) - \Delta \cos g \sin G$$
$$dr \sin u - r \cos u \, du = \sin G \, d\, (\Delta \cos g) + \Delta \cos g \cos G\,;$$

Moltiplicando la 1ª per $\sin G$, la 2ª per $\cos G$, e sottraendo, otteniamo:

$$\Delta \cos g \, d\, G = r \cos u \cos G \, du + r \sin u \sin G \, du +$$
$$+ (\sin u \cos G - \cos u \sin G)\, dr =$$
$$= r \cos (G - u)\, du + \sin (u - G)\, dr.$$

È dunque finalmente

(4) $\Delta \cos g \, dG = r \cos (G - u) \, du - \sin (G - u) \, dr.$

Si vede quindi come il sistema di coordinate adottato da Tietjen permette di separare i quattro elementi ellittici da quelli del piano, escludendo i a motivo della piccolezza di J. Questo è in certo modo il nodo della quistione.

Sostituendo nella (4) i valori di du e dr in funzione dei quattro elementi ellittici, otterremo l'equazione finale di condizione che cerchiamo. Prima però ci bisogna trovare il valore di G. Esso, insieme con quelli di g e γ, ci è dato dalle formole seguenti disposte pel calcolo con logaritmi ordinari [1], essendo M, N, λ, ρ angoli ausiliari.

$$\begin{cases} m \sin M = \sin \delta \sin (\alpha - \Omega) \\ m \cos M = \cos \delta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} n \sin N = \cos \delta \sin (\alpha - \Omega) \\ n \cos N = \sin \delta \end{array}$$

$$\begin{cases} \cos g \sin \gamma = \sin i \cos (\alpha - \Omega) \\ \cos g \cos \gamma = m \cos (M - i) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \cos g \sin G = n \sin (N + i) \\ \cos g \cos G = \cos \delta \cos (\alpha - \Omega) \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda \sin \rho = d \delta \\ \lambda \cos \rho = \cos \delta \, d\alpha \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \cos g \, d G = \lambda \cos (\rho - \gamma) \\ dg = \lambda \sin (\rho - \gamma) \end{array}$$

Fo notare di passaggio che non occorre in questa prima parte calcolare il valore di dg; e che inoltre si ha un controllo nel valore di $\cos g$ ricavato dal 2° e dal 3° gruppo di formole. Invece però delle formole precedenti sarà preferibile adoperare i logaritmi di addizione e sottrazione, impiegando le formole seguenti, nelle quali per semplicità scriviamo i in luogo di i_0.

$$\cos g \sin \gamma = \sin i \cos (\alpha - \Omega)$$

$$\cos g \cos \gamma = \cos i \cos \delta + \sin i \sin \delta \sin (\alpha - \Omega)$$

$$\cos g \sin \lambda = \sin \delta \sin i \cos (\alpha - \Omega) - \cos \delta \sin 2 (\alpha - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i$$

$$G = \alpha - \Omega + \lambda$$

Per questo calcolo bastano logaritmi a quattro decimali.

[1] Non quelli di addizione e sottrazione.

Ottenuti $\cos g$, $\sin \gamma$ e $\cos \gamma$, sostituendone i valori nella (1) avremo il termine noto $\cos g\, d\, G$ che serve per la prima correzione.

Rimane ora ad introdurre le relazioni fra du e dr e gli elementi ellittici. Queste relazioni s'introducono col calcolo delle formole:

$$A \sin A' = a\, tg\, \varphi \sin v \qquad A_c = \frac{A}{\Delta} \cos (G - u + A')$$

$$A \cos A' = \frac{a^2}{r} \cos \varphi \qquad B_c = \frac{r}{\Delta} \cos (G - u)$$

$$D \sin D' = - a \cos \varphi \cos v \qquad C_c = \frac{C}{\Delta} \cos (G - u + C')$$

$$D \cos D' = (p + r) \frac{\sin v}{\cos \varphi} \qquad D_c = \frac{D}{\Delta} \cos (G - u + D')$$

$$C \sin C' = A \sin A' . t - \frac{2r}{3\, \mu \sin 1''}$$

$$C \cos C' = A \cos A' . t$$

In queste formole il tempo t è espresso in giorni. Invece di prendere per origine dei tempi la prima data, si può scegliere una data intermedia, dando il segno negativo al t di quelle che precedono, il che farà evitare caratteristiche troppo grandi nei termini con C e C', Il fattore costante $\log \frac{2}{3 \sin 1'}$ è $= 5{,}13833$. Nel calcolo di queste formole, siccome pure delle precedenti, bisogna per ogni luogo impiegare i valori di Ω, i, φ, μ corrispondenti, tenendo cioè conto delle perturbazioni speciali. Questa diversità di valori non toglie l'omogeneità, perchè nelle equazioni di condizione le incognite sono sempre le stesse, cioè le correzioni dM_0, $d\omega_1$, $d\mu$, e $d\varphi$ agli elementi primitivi.

Come formole di controllo serviranno le seguenti, nelle quali E è l'anomalia eccentrica:

$$tg\, A' = \frac{tg\, \varphi\, r \sin v}{a \cos \varphi} = tg\, \varphi \sin E, \quad G_c = A_c\, t + \frac{2r \sin (G - u)}{3\, \mu \sin 1''}$$

$$D_c = a \sin E \cos (G - u) + a \cos \varphi \sin (G - \omega_1)$$

Finalmente l'equazione di condizione per ognuno dei luoghi è:

$$\cos g \, d \, G = A_o \, d \, M_0 + B_c \, d \, \omega_1 + C_c \, d \, \mu + D_c \, d \, \varphi \, .$$

Risolute le equazioni di condizione col metodo dei minimi quadrati, e aggiunte le correzioni dM_0, $d\omega_1$, $d\mu$ e $d\varphi$ agli elementi di partenza, si passa a rappresentare i vari luoghi, tenendo sempre conto delle perturbazioni. Queste per elementi equatoriali (che qui adoperiamo) si potrebbero ottenere mediante le note formole per passare dalle correzioni per elementi eclittici a quelle per equatoriali; ma io preferisco calcolare gli elementi equatoriali per ogni luogo, partendo dai corrispondenti eclittici con le perturbazioni, il che dà immediatamente le perturbazioni per elementi equatoriali, le quali serviranno poi per tutte le approssimazioni che si faranno nel correggere gli elementi.

Una osservazione importante è che per formare le costanti di Gauss pei singoli luoghi, basta aggiungere $d\omega_1$ agli archi A', B', C' (rispettivamente per ogni luogo), ritenendo per sin a, sin b, sin c gli stessi valori di prima. Questo è evidente, perchè in questa prima parte della correzione noi lasciamo invariati Ω ed i. In altri termini: essendo $\omega = \pi - \Omega$, la correzione totale dell'elemento ω risulta di due parti: l'una dipendente da π, l'altra da Ω. Ora, in questa prima parte supponiamo Ω invariato, rimane quindi la correzione $d\omega_1$ (che dinotiamo così perchè relativa all'orbita approssimata). Questa ci servirà per formare π per ogni luogo.

Si noti bene però che dopo la seconda parte, ottenute cioè le correzioni $d\Omega$, di, la correzione ad ω diviene:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 - \cos i \, \Delta\Omega.$$

Infatti, nell'istesso triangolo $k_1 \, \Omega\Omega_1$ abbiamo:

$$-\Delta\Omega \cos i = \cos k \sin \omega - \sin k \cos \omega \cos J.$$

E presa l'unità per cos J,

$$-\Delta\Omega \cos i = \sin (\omega - K) \, .$$

E da ultimo, per essere $\omega - K$ piccolissimo, scriveremo:

$$K - \omega = \Delta\Omega \cos i \quad , \quad \Delta\omega = K - \cos i \, \Delta\Omega \, .$$

Sicchè, per avere la correzione ad ω, bisognerà aggiungere a $\Delta\omega_1$ il termine $- \cos i \, \Delta\Omega$.

Passiamo ora alla seconda parte, cioè alle correzioni di Ω e di i.

La terza equazione delle (3) è di sua natura già differenziale, perchè la coordinata $+ Z$ non è altro che la distanza del Sole dal piano passante per la Terra, e parallelo a quello dell'orbita approssimata; eguaglia quindi la distanza del pianeta, supposto nell'orbita approssimata, dallo stesso piano condotto per la Terra. Dunque $Z = \Delta_0 \sin g_0$.

Sviluppando quindi la suddetta equazione, si ottiene:

$$r \sin u \cos K \sin J - r \cos u \sin K \sin J = \Delta \sin g - \Delta_0 \sin g_0 =$$

$$= d\,(\Delta \sin g)$$

Ora nel triangolo $K_1 \, \Omega\Omega_1$ si ha

$$\frac{\sin J}{d\,\Omega} = \frac{\sin i}{\sin K} \, ,$$

ossia

$$\sin J \sin K = \sin i \, d\Omega .$$

Si ha pure

$$\sin J \cos K = - \cos i \sin i_0 + \sin i \cos i_0 \cos d\Omega$$

ove per cos $d\Omega$ si prende l'unità. È dunque

$$\sin J \cos K = - \cos i \sin i_0 + \sin i \cos i_0 = \sin (i - i_0) = di \, .$$

Perciò

$$r \sin u \, di - r \cos u \, (\sin i \, d \, \Omega) = \Delta \cos g \, dg + \sin g \, d\Delta ,$$

ove l'ultimo termine, come quantità del 2° ordine, è da trascurare.

Questi scarti non sembreranno troppo forti ove si ponga mente al fatto che per base della mia correzione degli elementi non potei avere tre luoghi normali, ma dovetti contentarmi di tre osservazioni isolate degli anni 1893-95-98, non essendo poi l'orbita stata mai corretta. Avendo quindi potuto formare un vero luogo normale con le tre osservazioni molto concordanti del dott. Cerulli, risolvei di procedere ad una ulteriore correzione dell'orbita mediante il metodo di Tietjen. Fo notare che nella riduzione delle osservazioni dei 3 e 4 giugno, la stella di confronto (di 9.ª5) presenta una differenza di 0.ˢ25 e 0.″6 fra il Catalogo Generale Argentino e il Cape Catalogue. La media poi dei valori dati dai suddetti cataloghi differiva dalla osservazione fattane all'equatoriale (riferimento ad altra stella) per 0.ˢ17 e 1.″19. Per formare il luogo, io presi la media di queste tre autorità [1].

I miei luoghi di base erano dunque (equinozio del 1900.0).

	t. m. Berlino		α	δ
I	1893 marzo	22.5	185.° 3.′ 3.″6	— 7.° 24.′ 54.″3
II	1895 settemb.	24.5	359. 31. 15. 7	+ 3. 48. 43. 4
III	1898 marzo	1.5	148. 32. 38. 4	+ 17. 49. 56. 4
IV	1899 giugno	4.5	207. 33. 47. 1	— 24. 44. 45. 2

Le perturbazioni per parte di Giove e Saturno complessivamente erano per elementi ellittici:

	1893-95	1895-97	1897-98	1898-99
$\int\Delta L$	+ 2.′ 42.″97	+ 2.′ 21.″62	— 0.′ 14.″73	— 12.′ 31.″64
$\int\Delta\pi$	— 21. 31. 96	— 16. 31. 75	— 13. 24. 35	— 37. 53. 07
$\int\Delta\Omega$	— 1. 39. 61	+ 0. 7. 16	+ 0. 11. 36	— 3. 34. 70
$\int\Delta i$	+ 0. 1. 31	+ 0. 1. 76	— 0. 2. 70	— 1. 14. 63
$\int\Delta\varphi$	— 2. 26. 39	— 0. 30. 51	— 2. 47. 71	— 5. 59. 50
$\int\Delta\mu$	+ 0,41740	+ 0,27020	— 0,71540	— 1,02341

[1] Insisto su queste divergenze, affinchè gli astronomi teorici non facciano le meraviglie qualora le correzioni date ad un'orbita non dieno i risultati che si aspettano dalla teoria, nella quale si suppongano i luoghi normali esatti fino al decimo di secondo.

Tenendo conto di queste perturbazioni, calcolai, per elementi equatoriali, le orbite seguenti corrispondenti ai quattro luoghi, equinozio 1900.0, t. m. Berlino.

	1893 marzo 22.5	1895 sett. 24.5	1898 marzo 1.5	1899 giugno 4.5
M_0	249.° 40.′ 26.″ 77	52.° 6.′ 39.″ 93	210.° 2.′ 13.″ 57	291.° 49.′ 34.″ 95
π'	303. 5. 13. 84	302. 43. 38. 60	302. 13. 42. 70	301. 35. 44. 66
Ω'	356. 4. 11. 81	356. 3. 39. 24	356. 3. 45. 26	356. 2. 55. 09
ω'	307. 1. 2. 08	306. 39. 59. 36	306. 9. 57. 44	305. 32. 49. 57
i	33. 53. 59. 04	33. 53. 57. 68	33. 53. 57. 28	33. 52. 37. 68
φ	3. 46. 58. 44	3. 44. 32. 05	3. 41. 13. 83	3. 35. 14. 33
μ	636.″ 81029	637.″ 22769	636.″ 78249	635.″ 75908
$\log a$	0.497331	0.497141	0.497344	0.497809

Con queste orbite potei rappresentare come segue i quattro luoghi:

	I	II	III	IV
α	185.° 3.′ 3.″ 6	359.° 31.′ 18.″ 8	148.° 34.′ 51.″ 7	207.° 26.′ 47.″ 3
δ	— 7. 24. 54. 4	+ 3. 48. 49. 9	+ 17. 48. 31. 4	— 24. 40. 42. 7
$\log \Delta$	0.348856	0.306075	0.373255	0.351897
$\log r$	0.508736	0.480647	0.521266	0.489134

Gli scarti nel senso $O - C$ erano quindi:

$\Delta\alpha$	0.″ 0	— 3.″ 1	— 2.′ 13.″ 3	+ 6.′ 59.″ 8
$\Delta\delta$	+ 0. 1	— 6. 5	+ 1. 25. 0	— 4. 2. 5

Impiegando le formole di Tietjen riferite innanzi, ottenni i seguenti valori logaritmici pei coefficienti di dM_0, $d\omega_1$, $d\mu$, $d\varphi$, e pei termini noti:

A_c	0.13623	0.20662	0.09634	0.13935
B_c	0.15968	0.17457	0.14628	0.12820
C_c	0.97908	3.16855	3.34757	3.48620
D_c	0.40575 *n*	0.41384	0.04700 *n*	0.43046 *n*
$\cos g\, dG$	8.74118 *n*	0.79159 *n*	2.18283 *n*	2.65416

Questa volta presi per origine di t la prima data. I fattori di omogeneità (¹) furono dati da:

$$a = dM_0\,[0.20662],\quad b = d\omega\,[0.17457],\quad c = d\mu[3.48620]$$
$$d = d\varphi\,[0.43046],\quad n = \cos g\, dG\,[2.65416].$$

Formai quindi le seguenti equazioni normali (²):

b	a	c	d	s	n (1ª risul.)	n (2ª risul.)
+ 3.61938	+ 3.31930	+ 2.06384	+ 1.23666	+ 10.23918	+ 0.56852	— 1.48215
* 0.55863	0.52105	0.31468	0.09225	1.01027	9.75474	0.17089 n
	+ 3.06022	+ 1.90410	+ 1.01917	+ 9.30277	+ 0.58072	— 1.38518
(9.96242)	— 3.04415	— 1.89273	— 1.13414	— 9.39032	— 0.52138	+ 1.35927
	+ 0.01607	+ 0.01136	— 0.11497	— 0.08755	+ 0.05934	— 0.02591
	* 8.20602	8.05538	9.06060 n	8.94224 n	8.77335	8.41340 n
		+ 1.75968	+ 0.84039	+ 6.56799	+ 0.74791	— 1.15654
	(9.75604)	— 1.17684	— 0.70516	— 5.83856	— 0.32418	+ 0.84514
		+ 0.58284	+ 0.13523	+ 0.72943	+ 0.42373	— 0.31140
	(9.84936)	— 0.00803	+ 0.08128	+ 0.06189	— 0.04175	+ 0.01831
		+ 0.57481	+ 0.21650	+ 0.79132	+ 0 38878	— 0.29309
		* 9.75953	9.33546	9.89835	9.58181	9.46700 n
			+ 2.98975	+ 6.08597	+ 0.87350	— 1.19493
		(9.53362)	— 0.42254	— 3.49848	— 0.19425	+ 0.50641
			+ 2.56721	+ 2.58748	+ 0.67925	— 0.68852
		(0.85458 n)	— 0.82259	— 0.62635	+ 0.42456	— 0.18534
			+ 1.74462	+ 1.96113	+ 1.10381	— 0.87386
		(9.57593)	— 0.08154	— 0.29805	— 0.14379	+ 0.11039
			+ 1.66308	+ 1.66308	+ 0.96002	— 0.76347
			0.22091	= 0.22091	9.98228	9.88279 n

(¹) Ordinariamente si fa a meno di detti fattori, bastando un'approssimazione inferiore.

(²) Vedi l'avvertenza data a pag. 52, circa l'ultima cifra.

Fo notare che l'ultima cifra dei numeri e logaritmi qui riferiti sono quali risultarono dall'impiego del noto artifizio adoperato da Oppolzer, mediante il quale si evita sull'ultima cifra un errore superiore alla metà di una unità del suo ordine. Difficoltà tipografiche m'impedirono di far figurare il detto artifizio.

La prima parte della correzione mi dette i seguenti valori per le incognite:

dM	$d\omega_1'$	$d\varphi$	$d\mu$ (1)
$+35.'3.''83$	$-36.'6.''15$	$-1.'36.''62$	$+0.''06577$

La sostituzione di questi valori nelle equazioni normali lasciava gli scarti seguenti:

I	II	III	IV
$-0.''22$	$-0.''20$	$+1.''00$	$-0.''60$

In verità, trattandosi di quattro sole equazioni con quattro incognite, i residui dovrebbero esser nulli. Si rifletta però che il calcolo fu condotto con 5 decimali (il che è sufficiente) e che si operava con numeri di quattro cifre nella parte intera. L'accordo è dunque soddisfacente.

Applicando ai quattro elementi ellittici le correzioni trovate, ottenni le quattro orbite seguenti, tenendo conto delle perturbazioni per elementi equatoriali.

(1) La grandezza delle correzioni ad M ed ω_1' non sorprenderà ove si ponga mente alla piccola eccentricità dell'orbita. Invece la quasi eguaglianza dei valori di dM e $d\omega_1'$ è una prova che l'orbita è già abbastanza corretta.

1893 marzo 22.5

M_0	250.° 15.′ 30.″ 60
π'	302. 29. 7. 69
Ω'	356. 4. 11. 81
ω_1'	306. 24. 55. 88
i'	33. 53. 59. 04
φ	3. 45. 21. 82
μ	636.″ 87606
$\log a$	0.497294

$x = [9.999682]\, r \sin(\ 33.° \ 9.′ \ 6.″ 93 + v)$
$y = [9.919546]\, r \sin(301. \ 41. \ 2. \ 56 + v)$
$z = [9.746433]\, r \sin(306. \ 24. \ 55. \ 88 + v)$

1895 settembre 24.5

M_0	52.° 42.′ 47.″ 39
π'	302. 7. 32. 45
Ω'	356. 3. 39. 24
ω_1'	306. 3. 53. 21
i'	33. 53. 57. 68
φ	3. 42. 55. 43
μ	637.″ 29346
$\log a$	0.497111

$x = [9.999681]\, r \sin(\ 32.° \ 47.′ \ 37.″ 11 + v)$
$y = [9.919551]\, r \sin(301. \ 19. \ 20. \ 47 + v)$
$z = [9.746421]\, r \sin(306. \ 3. \ 53. \ 21 + v)$

1898 marzo 1.5

M_0	210.° 39.′ 19.″ 09
π'	301. 37. 36. 35
Ω'	356. 3. 45. 26
ω_1'	305. 33. 51. 09
i'	33. 53. 57. 28
φ	3. 39. 37. 21
μ	636.″ 84826
$\log a$	0.497314

$x = [9.999681]\, r \sin(\ 32.° \ 17.′ \ 39.″ 99 + v)$
$y = [9.919551]\, r \sin(300. \ 49. \ 25. \ 64 + v)$
$z = [9.746427]\, r \sin(305. \ 33. \ 51. \ 09 + v)$

1899 giugno 4.5

M_0	292.° 26.′ 15.″ 69
π'	300. 59. 38. 31
Ω'	356. 2. 55. 09
ω_1'	304. 56. 43. 22
i'	33. 52. 37. 68
φ	3. 33. 37. 71
μ	635.″ 82485
$\log a$	0.497779

$x = [9.999680]\, r \sin(\ 31.° \ 39.′ \ 47.″ 42 + v)$
$y = [9.919666]\, r \sin(300. \ 11. \ 21. \ 88 + v)$
$z = [9.746178]\, r \sin(304. \ 56. \ 43. \ 22 + v)$

Le costanti di Gauss furono dedotte immediatamente da quelle calcolate prima, con la semplice aggiunta di $d\omega'_1$.

Rappresentati i luoghi con questi elementi, ottenni gli scarti seguenti:

	I	II	III	IV
$\Delta\alpha$	$-1.''15$	$-2.''89$	$-1.''51$	$-19.''36$
$\Delta\delta$	$+7.10$	-0.10	$+11.48$	-1.56

L'efficacia del metodo si rende evidente, dacchè con la sola prima parte della correzione, i luoghi sono già rappresentati in modo soddisfacente.

Io però procedetti innanzi, e partendo da questi $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$, senza però cambiare $\sin\gamma$ e $\cos\gamma$, calcolai i seguenti valori logaritmici pei nuovi termini noti:

$\cos g\, dG$	0.68699 *n*	0.38932 *n*	0.18296 *n*	1.16745 *n*
dg	0.72399	0.18260	0.96683	0.98969

I valori di dg differiscono di pochi secondi da quelli di $\Delta\delta$. Prima di passare ad una seconda approssimazione per gli elementi ellittici mi conveniva correggere Ω ed i. Calcolai i coefficienti delle quattro equazioni di condizione ottenendo:

E	9.39151 *n*	9.11288	9.80915	0.02731
F	0.15346	0.17287 *n*	0.09698	9.94128
dg	0.72399	0.18260	0.96683	0.98969

Posto:

$$a = di\,[0.02731], \quad b = \sin i\, d\Omega\,[0.15346], \quad n = dg\,[0.98969]$$

ottenni le seguenti equazioni normali a coefficienti numerici:

a	*b*	*n*	*s*
$+1.43450$	-0.44085	$+1.46764$	$+2.46129$
-0.44085	$+3.24092$	$+0.59887$	$+3.39893$

La loro risoluzione mi dette:

$$di = +10.''33, \quad d\Omega = +4.''16$$

Sostituendo questi valori nelle quattro equazioni di condizione, ebbi gli scarti:

I	II	III	IV
$+4.''54$	$+3.''64$	$-0.''29$	$-0.''78$

Trattandosi di 4 equazioni fra due incognite la rappresentazione non sembrerà cattiva, massime chi rifletta che i primi tre luoghi sono dati da osservazioni isolate. Introdotti i nuovi termini noti $\cos g\, dG$ nelle antiche equazioni relative agli elementi ellittici, procedetti alla 2ª approssimazione, che mi dette i valori seguenti per le incognite:

dM	$d\omega$	$d\mu$	$d\varphi$
$-42.''57$	$+41.''43$	$-0.''001618$	$+2.''51$

Ora dM e $d\omega$ differiscono appena di $1''$ in valore assoluto.

Le equazioni di condizione erano soddisfatte con gli scarti insignificanti:

I	II	III	IV
$+0.''002$	$+0.''015$	$-0.''017$	$+0.''012$

Sebbene i quattro luoghi fossero rappresentati bene dalle orbite corrette con questa 2ª approssimazione, volli andare fino alla 3ª, per fermarmi solo agli scarti compatibili con gli errori di osservazione e con quelli delle posizioni delle stelle (1). I valori delle incognite risultarono finalmente:

dM	$d\omega$	$d\mu$	$d\varphi$
$+19.''73$	$-21.''94$	$-0.''00232$	$-0.''18$ (2)

La rappresentazione differenziale dette gli scarti seguenti:

I	II	III	IV
$-0.''012$	$+0.''003$	$+0.''010$	$-0.''007$

(1) La 2ª e 3ª approssimazione sono relative ai soli elementi ellittici. Per Ω ed i mi contentai della 1ª.

(2) Non rechi meraviglia che quest'ultima correzione a $d\mu$ sia maggiore di quella ottenuta nella 2ª approssimazione. Gli è che gli scarti lasciati da questa riguardavano soltanto α, essendo quasi nulli per δ. A dir vero questo sarebbe stato il caso di correggere *empiricamente* μ.

Le orbite erano finalmente pei singoli luoghi, sempre per elementi equatoriali equ. 1900.0:

	I	II	III	IV		
	1893 marzo 22.5	1895 settem. 24.5	1898 marzo 1.5	1899 giugno 4.5		
M	250.°15.′ 7.″76	52.°42.′ 20.″84	210.°38.′ 52.″75	292.°26.′ 51.″04		
π'	302. 29. 31. 34	302. 7. 56. 10	301. 38. 0. 00	301. 0. 1. 96	301. 28. 12. 01	Ecclitt.
Ω'	356. 4. 15. 97	356. 3. 43. 40	356. 3. 49. 42	356. 2. 59. 25	347. 56. 32. 35	
ω'	306. 25. 15. 37	306. 4. 12. 70	305. 34. 10. 58	304. 57. 2. 71	313. 31. 39. 66	
i'	33. 54. 9. 37	33. 54. 8. 01	33. 54. 7. 61	33. 52. 48. 01	10. 35. 36. 06	
φ	3. 45. 24. 15	3. 42. 57. 76	3. 39. 39. 54	3. 33. 40. 04		
μ	636.″87212	637.″28957	636.″84432	635.″82091		
log a	0.497303	0.497113	0.497316	0.497781		

Con le quali i luoghi erano rappresentati perfettamente, lasciando gli scarti:

	I	II	III	IV
$\Delta\alpha$	— 2.″69	— 1.″71	— 0.″62	— 1.″72
$\Delta\delta$	+ 3. 65	+ 3. 07	— 0. 35	— 1. 56

NB. Se moltiplicassi i $\Delta\alpha$ per i $\cos\delta$ rispettivi, diverrebbero anche più piccoli; ma quel fattore deve entrare solo nella formazione dei termini noti. I veri scarti sono i $\Delta\alpha$.

Passai quindi al calcolo delle perturbazioni per parte di Giove e Saturno fino alla prossima opposizione; esse risultarono complessivamente:

$$\begin{aligned} \int\Delta L &= +\ 0.'\ 9.''45 \\ \int\Delta\pi &= +34.\ 22.\ 05 \\ \int\Delta\Omega &= -\ 4.\ 51.\ 86 \\ \int\Delta i &= -\ 0.\ 8.\ 46 \\ \int\Delta\varphi &= -\ 4.\ 4.\ 62 \\ \int\Delta\mu &= +\ 0.''81679 \end{aligned}$$

L'orbita diveniva dunque:

Epoca ed osculazione 1900 agosto 12.5 Berl.

$$\begin{aligned} M &= 8.^\circ 31.' 40.''2 \\ \pi &= 302.\ 2.\ 34.\ 1 \\ \Omega &= 347.\ 51.\ 40.\ 5 \\ \omega &= 314.\ 10.\ 53.\ 6 \\ i &= 10.\ 35.\ 27.\ 6 \\ \varphi &= 3.\ 29.\ 35.\ 4 \\ \mu &= 636.''63770 \\ \log a &= 0.497409 \end{aligned}$$

(π, Ω, ω, i: Ecclitt. 1900.0)

In base a questi elementi calcolai l'effemeride seguente per la prossima opposizione.

12h Berlino.

1900		α vera	δ vera	log r	log Δ
Luglio . .	29	21.h 6.m 11.s 13	— 27.° 8.′45.″ 2	0.47029	0.29014
	30	» 5. 17. 15	» 9. 57. 0		
	31	» 4. 22. 84	» 11. 3. 6	47031	28984
Agosto . .	1	» 3. 28. 81	» 12. 4. 5		
	2	» 2. 33. 59	» 12. 59. 5	47033	28977
	3	» 1. 38. 74	» 13. 48. 6		
	4	21. 0. 43. 83	» 14. 31. 3	47038	28995
	5	20. 59. 48. 96	» 15. 7. 4		
☍	6	» 58. 54. 16	» 15. 36. 8	47040	29036
	7	» 57. 59. 52	» 15. 59. 5		
	8	» 57. 5. 07	» 16. 15. 3	47043	29103
	9	» 56. 10. 83	» 16. 24. 0		
	10	» 55. 16. 89	» 16. 25. 6	47046	29193
	11	» 54. 23. 31	» 16. 20. 1		
	12	» 53. 30. 15	» 16. 7. 6	47049	29307
	13	» 52. 37. 47	» 15. 48. 3		
	14	» 51. 45. 32	» 15. 21. 8	47052	29443
	15	» 50. 53. 76	» 14. 47. 7		
	16	» 50. 2. 84	» 14. 6. 1	47055	29603
	17	» 49. 12. 57	» 13. 17. 2		
	18	» 48. 23. 03	» 12. 21. 0	47059	29785
	19	» 47. 34. 27	» 11. 17. 6		
	20	» 46. 46. 40	» 10. 6. 9	47062	29989
	21	» 45. 59. 42	» 8. 48. 7		
	22	» 45. 13. 37	» 7. 23. 1	47066	30223
	23	» 44. 28. 31	» 5. 50. 3		
	24	» 43. 44. 28	» 4. 10. 2	47069	30458
	25	» 43. 1. 35	» 2. 22. 8		
	26	» 42. 19. 53	— 27. 0. 28. 4	47073	30721
	27	» 41. 38. 84	— 26. 58. 27. 0		
	28	» 40. 59. 34	» 56. 18. 7	47077	31006
	29	» 40. 21. 11	» 54. 3. 5		
	30	» 39. 44. 15	» 51. 41. 3	47081	31307
	31	» 39. 38. 49	» 49. 12. 6		
Settembre	1	» 38. 34. 14	» 46. 37. 5	47085	31625
	2	» 38. 1. 12	» 43. 55. 9		
	3	» 37. 29. 45	» 41. 8. 0	47090	31958
	4	» 36. 59. 18	» 38. 13. 9		
	5	20. 36. 30. 29	— 26. 35. 13. 6	0.47094	0.32306

grandezza 12.1 all' incirca.

Correzione dell'Orbita del pianeta (416) Vaticana

In una prima nota sul pianeta (416) io ne detti l'orbita determinata mediante la variazione delle distanze con quattro luoghi normali (*Bulletin Astronomique,* août 1897). Le osservazioni di base abbracciando appena un periodo di tre mesi, quell'orbita non poteva essere che una prima approssimazione. Essa bastò per far ritrovare il pianeta nella 2ª opposizione del 1897, anzi, per una circostanza molto favorevole, gli scarti *O-C* furono di appena $9.^s5$ e $1.'2$. Avendo formato altri 4 luoghi normali con le osservazioni della 2ª opposizione, con questi e coi 4 dell'anno precedente corressi l'orbita, adoperando il metodo ordinario dei cofficienti differenziali. Quella però fu una correzione abbastanza sommaria, non avendo io tenuto conto delle perturbazioni nell'intervallo di tre mesi abbracciato dalle osservazioni della 2ª opposizione, essendomi contentato d'una sola osculazione. Le correzioni risultanti furono rilevanti, cioè:

$$dM = +1.'10'', \quad d\pi = -15.'30'', \quad d\Omega = +1.'14''$$
$$di + -0.'48.''0, \quad d\varphi = -11.''39, \quad d\mu = +4.''95$$

La correzione al movimento medio è enorme; eppure si vedrà dal seguito del presente lavoro che essa non è molto lontana dal vero. La grande differenza poi fra dM e $d\pi$ rivelava che l'orbita era ancora scorretta. Calcolate le perturbazioni per Giove e Saturno fino alla 3ª opposizione, pubblicai l'effemeride di ricerca pel 1898 (*Bull. Astr.,* août 1898), mediante la quale il pianeta fu ritrovato con gli scarti -26^s e $-2.'29''$.

Gli elementi avevano dunque bisogno di ulteriori correzioni, e me ne sono occupato durante il soggiorno nell'Osservatorio di Collurania.

Riferisco qui il quadro delle varie orbite e delle perturbazioni, avvertendo che tutti i calcoli sono riferiti all'equinozio del 1900.0.

	1896 maggio 14.5 t. m. Berl.			Perturbazioni fino al 6 ottobre 1897 Giove	Saturno	1897 ottobre 26.5	Perturbazioni fino al 20 dicembre 1898 Giove	Saturno	1898 dicembre 10.5
M	337.°25′ 8.″6					89.°29.′21.″6			176.°10.′ 6.″3
π	254. 3. 28. 8	Ecclitt.	∫ΔL	— 2.′38.″58	+ 4.″28	254. 4. 5. 6	— 0.′47.″32	— 9.″49	254. 4. 19. 2
Ω	58. 33. 43. 0	Ecclitt.	∫Δπ	+ 0. 40. 72	— 3. 88	58. 32. 59. 3	— 0. 7. 31	+ 20.94	58. 32. 44. 4
ω	195. 29. 45. 8	Ecclitt.	∫ΔΩ	— 0. 33. 76	+ 0. 03	195. 31. 6. 3	— 0. 15. 24	+ 0.32	195. 31. 34. 8
i	12. 55. 38. 1	Ecclitt.	∫Δi	— 0. 2. 31	— 0. 01	12. 55. 35. 8	+ 0 9. 05	— 0.30	12. 55. 44. 5
φ	12. 29. 45. 8		∫Δφ	+ 1. 6. 89	— 3. 34	12. 30. 49. 4	+ 1. 9. 80	— 1.25	12. 31. 57. 2
μ	761.″6077		∫Δμ	— 0.″3661	+ 0. 0146	761.″2561	+ 0. 2260	— 0.0156	761.″4665
log a	0.445517					0.445651			0.445571

I luoghi da me scelti sono i seguenti. Fo notare però che il 2° e 4° sono dati da osservazioni isolate; la 1ª di Charlois, l'altra del Cerulli. Le ho fatte entrare nel calcolo perchè molto lontane dalle altre

	α	δ
1896 maggio . . 14.5	13.ʰ 53.ᵐ 18.ˢ 69	— 3.° 42.′ 59.″ 7
» agosto . . 6.5	14. 25. 48. 21	— 16. 34. 25. 6
1897 ottobre . . 26.5	0. 9. 2. 02	— 14. 22. 44. 5
» dicembre . 14.5	0. 8. 23. 10	— 9. 18. 5. 0
1898 dicembre . 10.5	4. 21. 56. 36	+ 25. 36. 44. 8

Rappresentando i suddetti luoghi con le orbite corrispondenti, tenendo conto anche delle perturbazioni nei piccoli intervalli di tempo durante una stessa opposizione, ottenni gli scarti seguenti nel senso *O-C*.

	I	II	III	IV	V
$\Delta\alpha$	$-0.^s14$	$+0.^s04$	$-0.^s27$	$-0.^s19$	$-26.^s13$
$\Delta\delta$	$-6.''1$	$-15.''0$	$-4.''4$	$-12.''7$	$-2.'28''9$

Volendo impiegare la variazione delle distanze, seguendo un metodo consigliato talora, cominciai dal liberare le osservazioni dall'influsso delle perturbazioni. Negli *O-C* suddetti io ho paragonato le osservazioni, cioè l'orbita effettiva, su cui avevano influito le perturbazioni, coi luoghi rappresentati dall'orbita approssimata su cui posso supporre (con certa approssimazione) le perturbazioni abbiano prodotto l'istesso effetto (¹). Se quindi rappresento i luoghi con l'antica orbita senza perturbazioni, ed agli scarti che essi presentano colle osservazioni aggiungo i $\Delta\alpha$ (²) e i $\Delta\delta$ surriferiti, avrò delle osservazioni fittizie, e tali che il metodo della variazione delle distanze possa applicarvisi (³).

I luoghi rappresentati con l'orbita primitiva risultavano:

	α	δ
I	$13.^h53.^m18.^s83$	$-3.^\circ42.'53.''6$
II	14. 25. 49. 14	−16. 34. 8. 1
III	0. 9. 3. 48	−14. 22. 43. 2
IV	0. 8. 24. 79	− 9. 17. 50. 3
V	4. 22. 42. 52	+25. 40. 29. 2

Aggiunti ad essi i $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ rispettivi (come ho detto poc'anzi) ottenni i seguenti 5 luoghi di base, ove le α sono

(¹) Il seguito del calcolo mi fè vedere come questa ipotesi non sia sempre legittima, il che mi decise a non ricorrervi più.

(²) Non già $\Delta\alpha \cos\delta$.

(³) Quel metodo può applicarsi anche ai luoghi veri, non fittizi, e con più esattezza.

espresse in arco, forma più conveniente per le equazioni risultanti dalla variazione delle distanze.

	α	δ	log Δ
I	208.° 19.′ 40″. 3	— 3.° 42.′ 59.″ 7	0.118966
II	216. 27. 17. 7	— 16. 34. 33. 1	
III	2. 15. 48. 1	— 14. 22. 47. 6	
IV	2. 6. 9. 0	— 9. 18. 3. 0	
V	65. 34. 5. 8	+ 25. 38. 0. 3	0.384239

Adottata una variazione di + 1500 della 6ª decimale sui logaritmi delle distanze estreme, ottenni i tre sistemi di coordinate eliocentriche per i due luoghi estremi.

		l	*b*	log *r*
I ipotesi	log Δ′	218.° 23.′ 55.″ 9	— 10.° 32.′ 52.″ 6	0.353920
	log Δ‴	69. 12. 49. 5	+ 24. 58. 43. 4	0.530507
II ipotesi	log Δ′ + 1500	218. 22. 42. 3	— 10. 32. 4. 4	0.354775
	log Δ‴	69. 12. 49. 5	+ 24. 58. 43. 4	0.530507
III ipotesi	log Δ′	218. 23. 55. 9	— 10. 32. 52. 6	0.353920
	log Δ‴ + 1500	69. 12. 17. 3	+ 24. 58. 49. 8	0.531576

Ecco i risultati delle tre ipotesi:

	I	II	III
$2f$	212.° 34.′ 47.″ 3	212.° 36.′ 13.″ 7	212.° 34.′ 21.″ 8
$2g$	205. 23. 2. 6	205. 18. 23. 6	205. 11. 14. 0
u	200. 11. 30. 9	200. 9. 52. 1	200. 11. 13. 8
u'	52. 46. 18. 1	52. 46. 5. 8	52. 45. 35. 6
E	331. 34. 57. 5	331. 18. 16. 8	331. 22. 25. 5
E'	176. 58. 0. 1	176. 36. 40. 4	176. 33. 39. 5
M	337. 28. 51. 1	337. 14. 13. 2	337. 21. 37. 7
M'	176. 18. 39. 0	175. 52. 51. 2	175. 48. 41. 0

Naturalmente impiegai tutte le formole di controllo per i suddetti elementi. In questo caso, essendo i valori di ω ed $f-g$ abbastanza grandi, cioè in media rispettivamente 5.° 30′

e 3.°39′, l'accordo fra i valori di γ^2 e p, ottenuti direttamente e mediante le formole delicatissime di controllo:

$$\gamma^2 = \frac{\sqrt{2\ m\ \cos f}}{\eta} \qquad p = \frac{\eta\ rr'\ \sin\ 2\ f}{\tau}$$

era più che soddisfacente; lo scarto giungendo appena a due unità della 6ª.

Le tre orbite, per elementi equatoriali, risultarono:

	I ipotesi	II ipotesi	III ipotesi
		1896 mag. 14.5 t. m. Berl.	
M	337.° 28.′ 51.″ 1	337.° 14.′ 13.″ 2	337.° 21.′ 37.″ 7
π	256. 17. 19. 8	256. 34. 35. 8	256. 36. 11. 5
Ω	21. 4. 55. 7	21. 5. 9. 7	21. 5. 15. 7
ω	235. 12. 24. 1	235. 29. 26. 1	235. 30. 55. 8
i	32. 1. 45. 3	32. 1. 50. 8	32. 2. 14. 0
φ	12. 29. 34. 3	12. 27. 10. 5	12. 35. 49. 9
μ	761.″ 4765	760.″ 7638	760.″ 0247
log. a	0.445567	0.445838	0.446119

I tre luoghi intermedi, rappresentati con queste tre orbite, e paragonati coi tre corrispondenti luoghi di base, dettero luogo ai tre sistemi di equazioni:

$$\text{I} \begin{cases} -\ 13.''1 = -166.''5\,\Delta x & +\ 18.''4\,\Delta y \\ -\ 23.\ 8 = +167.\ 5\ \text{»} & -\ 57.\ 8\ \text{»} \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} +274.\ 7 = -464.\ 8\ \text{»} & +946.\ 8\ \text{»} \\ +116.\ 1 = -282.\ 5\ \text{»} & +507.\ 2\ \text{»} \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} +205.\ 3 = -303.\ 6\ \text{»} & +682.\ 8\ \text{»} \\ +\ 92.\ 9 = -181.\ 6\ \text{»} & +379.\ 8\ \text{»} \end{cases}$$

Questi sistemi risoluti separatamente dando luoghi a valori molto diversi per Δx e Δy, compresi che le distanze rimanevano ancora molto indeterminate. Adottai quindi le correzioni medie

$$\log \Delta' = +1390 \text{ della } 6^a$$
$$\log \Delta''' = +1118 \text{ della } 6^a$$

Partendo quindi da log $\Delta' = 0.120356$ e log $\Delta''' = 0.385357$, ottenni l'orbita seguente:

1896 mag. 14.5 Berlino		
M	337.° 9.′ 29.″ 9	
π	256. 47. 22. 7	Equat.
Ω	21. 5. 23. 0	Equat.
ω	235. 41. 59. 7	Equat.
i	32. 2. 11. 1	Equat.
φ	12. 31. 31. 6	
μ	759″. 7652	
log a	0. 446218	

Quest'orbita passando esattamente per i luoghi estremi mi dette per i tre luoghi intermedi gli scarti:

	I	II	III
$\Delta\alpha$	+ 144.″ 5	+ 83.3	+ 33.9
$\Delta\delta$	— 146. 0	+ 45.3	+ 11.6

Apparisce che con questa prima correzione si era guadagnato qualche cosa, ma era necessario procedere ad una seconda approssimazione. Partendo dunque da quest'ultima orbita, e facendo variare di — 500 i due log Δ, ottenni le altre due orbite, come 2ª e 3ª ipotesi.

M	337.° 14.′ 19.″ 2	337.° 12.′ 5.″ 4
π	256. 41. 41. 2	256. 41. 4. 7
Ω	21. 5. 18. 4	21. 5. 16. 5
ω	235. 36. 22. 8	235. 35. 48. 3
i	32. 35. 20. 5	32. 2. 1. 8
φ	12. 32. 18. 8	12. 29. 38. 8
μ	759″. 9999	760.2376
log a	0.446129	0.446038

Rappresentati i tre luoghi intermedi con queste orbite, ottenni le seguenti equazioni di condizione:

I	$+144.''9 = +\ 58.''0\,\Delta x$		$-\ 2.''6\,\Delta y$
	$-146.\ 0 = -\ 55.\ 2$ »		$+\ 14.\ 2$ »
II	$+\ 83.\ 3 = +153.\ 7$ »		$-278.\ 3$ »
	$+\ 45.\ 7 = +\ 92.\ 3$ »		$-148.\ 2$ »
III	$+\ 33.\ 9 = +\ 99.\ 7$ »		$-203.\ 7$ »
	$+\ 11.\ 6 = +\ 59.\ 5$ »		$-112.\ 1$ »

Per ottenere i valori più probabili per Δx e Δy applicai il metodo dei minimi quadrati alla risoluzione di queste equazioni (¹). Le mie equazioni normali, nella disposizione raccomandata da Gauss risultarono:

(aa)	(ab)	(an)
52026.97	— 84361.07	37560.61
[4.716229]	[4.926142 n]	[4.574733]
	153682.57	— 40624.78
(0.209913 n)	— 136790.30	+ 60904.00
	+ 16892.27	+ 20279.22
	[4.227688]	[4.307052]

$\Delta y = [0.079364]$

Sostituendo questo valore di Δy nella equazione

$$(ab)\,\Delta y + (an)\,\Delta x = (an)$$

ottenni $\Delta x = [0.426275]$. Però siccome per questa via l'incertezza rimanente su Δy si riporta nella determinazione di Δx, rivolsi direttamente le equazioni normali, cominciando da Δx.

(bb)	(ba)	(bn)
153682.57	— 84361.07	— 40624.78
[5.186624]	[4.926142 n]	[4.608791 n]
	52026.97	37560.61
	— 46308.44	— 22300.21
	+ 5718.53	+ 15260.40
	[3.757284]	[4.183566]

$\Delta x = [0.426282]$

(¹) I $\Delta\alpha$ vanno moltiplicati per cos δ per avere omogeneità.

La differenza è veramente piccolissima. Ricordando che la variazione adottata per le distanze in questa seconda approssimazione è — 500, si trova per correzione a

$$\log \Delta' \quad -1334$$
$$\log \Delta''' \quad -\ \ 600$$

A fine di vedere anticipatamente con quale approssimazione sarebbero rappresentati i tre luoghi intermedi, bisognava sostituire i valori di Δx e Δy nelle equazioni di condizione. Ottenni i residui:

I	II	III	IV	V	VI
— 6.8	— 15.7	+ 7.3	— 22.6	+ 12.4	— 12.6

Certamente l'orbita ottenuta con questa correzione a Δ' e Δ''' non avrebbe potuto essere definitiva, ma, non potendo far di meglio, partii dalle distanze corrette:

$$\log. \Delta' = 0.119022 \qquad \log. \Delta''' = 0.384757$$

e ottenni l'orbita:

M	337.° 25.′ 33.″ 8
π	256. 24. 31. 8
Ω	21. 5. 3. 7
ω	235. 19. 28. 1
i	32. 1. 55. 7
φ	12. 31. 23. 6
μ	760.″ 9639
$\log a$	0.445762

I tre luoghi dettero gli scarti:

	I	II	III
$\Delta\alpha$	— 8.″ 4	+ 5.″ 6	+ 8.″ 3
$\Delta\delta$	— 15. 2	— 25. 1	— 14. 8

Giunto a questo punto, compresi dalla sensibile e costante contraddizione delle equazioni di condizione che il metodo della variazione delle distanze non potrebbe più giovarmi,

e che la causa delle divergenze dovevasi ripetere dal modo con cui si era tenuto conto delle perturbazioni. In generale, può ritenersi che l'effetto delle medesime sia lo stesso sull'orbita effettiva e sull'approssimata; ma non si può dire che debba assolutamente essere lo stesso l'effetto delle perturbazioni *sui luoghi*. In altri termini: l'avere aggiunto ai luoghi da me rappresentati con l'orbita non perturbata, gli scarti *O-C*, fra le osservazioni e i luoghi calcolati coll'orbita perturbata, non è sempre rigoroso, e l'effetto se ne è veduto nell'impossibilità di rappresentar meglio i detti luoghi fittizi.

Io dunque mi attenni per allora all'ultima orbita, e passai a vedere come essa rappresentasse le vere osservazioni, quando le aggiungessi le perturbazioni. Per evitare ogni causa di errore, ricalcolai le perturbazioni dalla 1ª alla 2ª opposizione, perchè l'orbita con cui furono calcolate la prima volta era poco esatta. Passando dall'equatore all'ecclittica, l'orbita cui mi ero fermato diveniva:

1896 mag. 14.5 t. m. B.

M	337.° 25.′ 33.″ 8
π	254. 4. 56. 3
Ω	58. 34. 5. 2
ω	195. 30. 51. 1
i	12. 55. 17. 8
φ	12. 31. 23. 6
μ	760.″ 9632
log. a	0.445762

Ricalcolate con questa orbita le perturbazioni fino al 15 novembre 1897, per avere un'osculazione media fra i due luoghi di quell'anno, ottenni:

$$\int \Delta L = -2.' 59.'' 04$$
$$\int \Delta \pi = +0. 35. 26$$
$$\int \Delta \Omega = -0. 33. 38$$
$$\int \Delta i = -0. 1. 66$$
$$\int \Delta \varphi = +1. 4. 69$$
$$\int \Delta \mu = -0. 0. 3477$$

Questi valori sono quasi identici a quelli ottenuti la prima volta.

Tenendo conto adunque di tutte le perturbazioni, rappresentai i cinque luoghi, i quali, paragonati con le osservazioni, mi dettero gli scarti:

	I	II	III	IV	V
$\Delta\alpha$	$-0.''8$	$-21.''9$	$+53.''0$	$+30.''6$	$+47.''0$
$\Delta\delta$	$+0.\ 2$	$-\ 7.\ 3$	$-\ 1.\ 6$	$+\ 1.\ 5$	$+35.\ 7$

Volendo però ad ogni costo giungere ad un'orbita corretta, profittando dello splendore del pianeta e della potenza del grande refrattore del nostro Osservatorio, pensai di ricercare il pianeta più di quattro mesi prima della opposizione. Le perturbazioni sino al 26 settembre 1899 risultarono:

$$\int\Delta L = +0.'\ 0.''24$$
$$\int\Delta\pi = +2.\ 20.\ 28$$
$$\int\Delta\Omega = +0.\ \ 6.\ 32$$
$$\int\Delta i = +0.\ \ 1.\ 94$$
$$\int\Delta\varphi = +1.\ \ 1.\ 27$$
$$\int\Delta\mu = +\ \ 0.\ 2063$$

Con l'orbita così perturbata calcolai la seguente effemeride di ricerca:

12ʰ Berlino

1899	α vera	δ vera	log *r*	log Δ
settemb. 26	8.ʰ 52.ᵐ 9.ˢ 08	+27.° 11.′ 8.″ 6	0.50472	0.55162
27	» 53. 26. 77	» 9. 11. 2		
28	» 54. 44. 20	» 7. 14. 4	0.50433	0.55841
29	» 56. 1. 29	» 5. 18. 9		
30	» 57. 17. 98	» 3. 24. 9	0.50393	0.55513
Ottobre 1	» 58. 34. 19	27. 1. 33. 1		
2	» 59. 49. 84	26. 59. 43. 9	0.50352	0.55178

Il dott. Cerulli ebbe la cortesia di osservare il pianeta, il quale, grazie all'esattezza dell'effemeride, fu trovata immediatamente, con gli scarti medi *O-C:*

$$+3.^s2 \qquad +0.'3$$

Con queste osservazioni formai il sesto luogo normale seguente pel 1900.0

	α	δ
1899 ott. 1.5	134.° 39.′ 15.″ 3	+ 27.° 1.′ 53.″ 8

Ciò fatto applicai il metodo di Tietjen e dopo due approssimazioni, le correzioni all'orbita adottata risultarono per elementi equatoriali:

$dM = -1.' 0.'' 0$, $d\pi = +1.' 29.'' 9$, $d\Omega = +21.'' 2$,
$di = +28.1$, $d\varphi = +1.2$, $d\mu = -0''.00515$

L'orbita finale era dunque:

1896 mag. 14.5		
M	337.° 24.′ 33.″ 8	
π	254. 6. 12. 4	Ecclittica 1900.0
Ω	58. 33. 18. 7	
ι	12. 55. 40. 4	
φ	12. 31. 24. 8	
μ	760.″ 95875	
$\log a$	0.445764	

Con essa i luoghi erano rappresentati nel modo seguente:

	I	II	III	IV	V	VI
$\Delta\alpha$	+ 3.″ 3	+ 3.″ 4	+ 1.″ 6	— 1.″ 7	— 5.″ 4	+ 0.″
$\Delta\delta$	— 1. 3	— 8. 0	— 0. 3	— 4. 7	— 3. 2	+ 6. 1

Il secondo luogo risultando da una sola osservazione, lo scarto — 8″. 0 non mi pare eccessivo. D'altronde in questo caso anche il metodo di Tietjen mi obbligò a ricorrere a due approssimazioni, perchè si presentò quello che accade proprio raramente, che cioè il valore di sin γ [1] fu grande. Siccome nel suddetto metodo i valori dei termini noti delle

[1] V. pag. 48.

equazioni coi coefficenti differenziali, per la prima come per la seconda parte della correzione degli elementi, si formano con $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ insieme, quando i $\Delta\delta$ sono un po' forti e sin γ anche grande, l'introduzione del termine sin $\gamma\ d\delta$ nel valore di cos$g\ dG$ altera sensibilmente la prima parte cos γ cos $\delta d\alpha$, il che ritarda la soluzione esatta.

Finalmente prolungai le perturbazioni fino alla opposizione di febbraio 1900, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
\int\Delta L &= +0.'12.''8 \\
\int\Delta\pi &= +1.\ 28.\ 7 \\
\int\Delta\Omega &= +0.\ \ 0.\ 1 \\
\int\Delta i &= \ \ \ 0.\ \ 0.\ 0 \\
\int\Delta\varphi &= +0.\ 16.\ 0 \\
\int\Delta\mu &= +0.\ 11956
\end{aligned}
$$

L'orbita perturbata era quindi:

Epoca ed osculazione 1900 gennaio 24.5 t. m. Berl.

M	262.° 34.′ 31.″ 7
π	254. 10. 50. 9
Ω	58. 32. 36. 8
ω	195. 38. 14. 1
i	12. 55. 48. 4
φ	12. 34. 55. 2
μ	761.″ 14731
$\log a$	0.445692

Con essa calcolai l'effemeride seguente:

12.^h Berlino

1900	α vera	δ vera	log γ	log Δ
Gennaio 24	9.^h 45.^m 44.^s 09	+ 32.° 56.′ 54.″ 6	0.47576	0.31304
25	» 44. 52. 36	+ 33. 4. 4. 4		
26	» 43. 59. 58	» 11. 8. 1	47518	31102
27	» 43. 5. 75	» 18. 5. 3		
28	» 42. 10. 95	» 24. 55. 6	42460	30923
29	» 41. 15. 19	» 31. 38. 4		
30	» 40. 18. 58	» 38. 13. 3	47402	30768
31	» 39. 21. 17	» 44. 39. 8		
Febbr. 1	» 38. 22. 96	» 50. 57. 8	48344	30636
2	» 37. 24. 15	+ 33. 57. 6. 6		
3	» 36. 24. 69	+ 34. 3. 5. 9	47285	30530
4	» 35. 24. 75	» 8. 54. 9		
5	» 34. 24. 29	» 14. 33. 6	40226	30448
6	» 33. 23. 47	» 20 1. 4		
7	» 32. 22. 32	» 25. 16. 6	47167	30391
8	» 31. 20. 86	» 30. 22. 0		
9	» 30. 19. 30	» 35. 16. 5	47107	30359
10	» 29. 17. 55	» 39. 57. 6		
11	» 28. 15. 82	» 44. 26. 3	47047	30350
12	» 27. 14. 09	» 48. 43. 1		
13	» 26. 12. 45	» 52. 46. 4	46987	30366
14	» 25. 11. 01	+ 34. 56. 36. 6		
15	» 24. 9. 80	+ 35. 0. 14. 4	46927	30405
16	» 23. 8. 92	» 3. 38. 3		
17	» 22. 8. 37	» 6. 48. 8	46866	30468
18	» 21. 8. 29	» 9. 45. 9		
19	» 20. 8. 78	» 12. 29. 0	46805	30554
20	» 19. 9. 82	» 14. 58 9		
21	» 18. 11. 50	» 17. 14. 6	46744	30662
22	» 17. 13. 80	» 19. 15. 4		
23	» 16. 16. 79	» 21. 1. 7	46805	30791
24	» 15. 20. 55	» 22. 32. 7		
25	9. 14. 25. 20	+ 35. 23. 47. 6	0.46867	0.30940

grand. circa 11.4

La grossolana commensurabilità fra il movimento medio del pianeta e quello di Giove, la quale, per le perturbazioni, può andare fino a $2\mu - 5\mu' = 22''$ rende interessante il pianeta.

Il pianeta venne ritrovato la sera del 26 gennaio dal prof. Millosevich dell'Osservatorio del Collegio Romano. L'effemeride dava i piccolissimi scarti seguenti *O-C:*

$$+0.^{s}66 \qquad +8.''8.$$

Nel terminare questi miei lavori, sento il dovere di esprimere la mia riconoscenza al dott. Cerulli, il quale in molte circostanze mi favorì i suoi preziosi consigli.